

Universidad Carlos III de Madrid

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA



Grado en Ingeniería Mecánica

Trabajo fin de grado

ANÁLISIS MODAL DE UN EJE FERROVIARIO Y COMPARATIVA CON UN EQUIVALENTE UNIDIMENSIONAL

Autor: Miguel Marco Esteban

Tutor: David Mauricio Alba Lucero

Leganés, Septiembre 2012

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres todos los esfuerzos prestados, tanto económicos como anímicos. Estoy seguro de que sin su ayuda no habría llegado hasta este punto en el que me encuentro.

A mis hermanas, las cuales me han señalado el camino a seguir, y me han ayudado en todo lo que necesitaba, y no solo como hermanas, si no también como amigas.

A mi tutor, Mauricio, por su incansable ayuda sin entender de horarios, días, o incluso vacaciones.

Resumen

El siguiente proyecto se centra en el análisis modal de un eje ferroviario en tres dimensiones y en la comparativa entre dicho eje y un modelo unidimensional. En dicho eje se han generado diferentes fisuras planas con distintas profundidades. Todos los problemas de elementos finitos que se incluyen en el documento han sido realizados mediante el software Abaqus/CAE.

En el proyecto se presenta una introducción a las vibraciones mecánicas, una breve exposición del software y el método de estudio empleado.

Una vez expuesta la base del trabajo, se analizarán las frecuencias naturales del eje original y las del eje fisurado. Además de ello se realizará un eje con elementos unidimensionales y se compararán los resultados obtenidos para comprobar su equivalencia respecto al eje original.

El proyecto incluye tanto el análisis de sensibilidad del mallado propio de un estudio mediante elementos finitos, como las metodologías de estudio de los problemas y las conclusiones extraídas de los diferentes ejercicios.

Palabras clave

Eje ferroviario, análisis modal, fisura, grieta, Abaqus/CAE, frecuencia natural.

Abstract

This project tells about the modal analysis of a railway axle in 3D and the differences between that axle and a one-dimensional model. This project has been performed by Abaqus/CAE software.

An introduction of mechanical vibrations, the software exposition and the method used during the study, are presented along this project.

Once the introduction has been carried out, the natural frequencies of the axle are analyzed. In the same way, the process is repeated for a cracked axle.

Moreover, an axle with one-dimensional elements is built and the results are compared to check the equivalence.

The project includes the study of the mesh's sensibility on a finite elements analysis and the methodology to study the issues, just as the conclusions obtained from the different problems.

Keywords

Railway axle, modal analysis, fissure, crack, Abaqus/CAE, natural frequency.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS.....	1
1.1 INTRODUCCIÓN	2
1.2 OBJETIVOS.....	4
CAPÍTULO 2: INTRODUCCIÓN A LAS VIBRACIONES MECÁNICAS.....	7
2.1 VIBRACIONES MECÁNICAS	8
2.2 TIPOS DE VIBRACIONES	12
2.3 EL ANÁLISIS MODAL	16
2.4 TÉCNICAS DE DIAGNÓSTICO UTILIZANDO EL ANÁLISIS MODAL.....	28
2.5 ESTADO DEL ARTE SOBRE LA APROXIMACIÓN DE UN EJE MEDIANTE SECCIONES	33
CAPÍTULO 3: PLANTEAMIENTO DE LOS PROBLEMAS	37
3.1 MÉTODO DE RESOLUCIÓN	38
3.2 DESCRIPCIÓN DE LOS PROBLEMAS.....	42
3.3 CARACTERÍSTICAS DEL EJE	44
3.4 SIMPLIFICACIONES REALIZADAS	45
3.5 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DEL MALLADO	47
3.6 METODOLOGÍA DE ESTUDIO DEL PRIMER PROBLEMA	51
3.7 METODOLOGÍA DE ESTUDIO DEL SEGUNDO PROBLEMA	57
CAPÍTULO 4: DESARROLLO DEL PRIMER PROBLEMA Y RESULTADOS	60
4.1 DESARROLLO DEL PROBLEMA MEDIANTE ABAQUS.....	61
4.2 RESULTADOS.....	68
CAPÍTULO 5: DESARROLLO DEL SEGUNDO PROBLEMA Y RESULTADOS	84
5.1 INTRODUCCIÓN	85

5.2	DESARROLLO DEL PROBLEMA MEDIANTE ABAQUS.....	86
5.3	RESULTADOS	95
CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS		117
6.1	CONCLUSIONES	118
6.2	TRABAJOS FUTUROS	125
CAPÍTULO 7: PRESUPUESTO.....		126
7.1	PRESUPUESTO	127
CAPÍTULO 8: BIBLIOGRAFÍA.....		128
8.1	LIBROS Y PUBLICACIONES	129
8.2	DOCUMENTOS ELECTRÓNICOS O SITIOS WEB.....	131
CAPÍTULO 9: ANEXOS		132
ANEXO A. RESULTADOS DE EJE EQUIVALENTE MEDIANTE SECCIONES		133
ANEXO B. PLANO DE EJE FERROVIARIO		143

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1	Grieta real en un eje ferroviario	2
Figura 2.1	Representación de una vibración armónica	8
Figura 2.2	Distintos tipos de vibraciones	12
Figura 2.3	Espectro de una señal determinista periódica	13
Figura 2.4	Espectro de una señal determinista no periódica	13
Figura 2.5	Representación de una onda senoidal	13
Figura 2.6	Señal de una vibración aleatoria	15
Figura 2.7	Esquema de un sistema de 1 Grado de Libertad	16
Figura 2.8	Descomposición de una onda.....	17
Figura 2.9	Vibraciones longitudinales sobre una barra	18
Figura 2.10	Vibraciones torsionales sobre una barra	21
Figura 2.11	Viga en flexión.....	23
Figura 2.12	Esquema de un sistema PCRT	29
Figura 2.13	Variación de las frecuencias con el aumento del número de ciclos.....	30
Figura 2.14	Relación entre el número de ciclos y elongación/variación de las frecuencias	31
Figura 2.15	Estudio de eje ferroviario para la banda 8-9.5 KHz.....	32
Figura 2.16	Representación de un eje creado mediante secciones. l_c es la longitud de la sección fisurada	33
Figura 2.17	Eje empotrado y sección transversal de la fisura	34
Figura 2.18	Resultados del análisis a flexión	35
Figura 2.19	Resultados del análisis a torsión	35
Figura 3.1	Boceto del eje sometido a estudio.....	44
Figura 3.2	Representación de la zona a analizar	45
Figura 3.3	Eje definitivo del estudio	46
Figura 3.4	Mallado empleado en el artículo sobre aproximación mediante secciones	47
Figura 3.5	Análisis de sensibilidad en el primer modo flector.....	48
Figura 3.6	Análisis de sensibilidad en el primer modo torsor	49
Figura 3.7	Análisis de sensibilidad en el primer modo longitudinal	49
Figura 3.8	Modos flectores a analizar	53
Figura 3.9	Modos torsores a analizar	54
Figura 3.10	Modos longitudinales a analizar	54

Figura 3.11	Parámetros de las fisuras.....	55
Figura 4.1	Eje diseñado mediante Abaqus/CAE	61
Figura 4.2	Apariencia del <i>Step</i> creado.....	63
Figura 4.3	Particiones creadas para las fisuras	64
Figura 4.4	Particiones ya extendidas a toda la superficie.....	65
Figura 4.5	Asignación de la superficie de la fisura	65
Figura 4.6	Línea de contacto y dirección de la fisura.....	66
Figura 4.7	Eje empotrado en sus extremos.....	67
Figura 4.8	Eje mallado	67
Figura 5.1	Creación del perfil circular	87
Figura 5.2	Edición del perfil <i>Generalized</i>	87
Figura 5.3	Parámetros de la sección fisurada	88
Figura 5.4	Sección fisurada y eje de simetría y	90
Figura 5.5	Propiedades de la sección para el cálculo del CDG.....	92
Figura 5.6	Asignación de la sección para las fisuras A.....	93
Figura 5.7	Asignación de la sección para las fisuras B	93
Figura 5.8	Gráficas de convergencia para la fisura A20	96
Figura 5.9	Gráficas de convergencia para la fisura A40	97
Figura 5.10	Gráficas de convergencia para la fisura A60	98
Figura 5.11	Gráficas de convergencia para la fisura A80	99
Figura 5.12	Gráficas de convergencia para la fisura A100	100
Figura 5.13	Gráficas de convergencia para la fisura B20	101
Figura 5.14	Gráficas de convergencia para la fisura B40	102
Figura 5.15	Gráficas de convergencia para la fisura B60	103
Figura 5.16	Gráficas de convergencia para la fisura B80	104
Figura 5.17	Gráficas de convergencia para la fisura B100	105
Figura 5.18	Comparación de la variación entre las fisuras A y las fisuras B.....	116
Figura 6.1	Variación de la geometría por fisura A100.....	120
Figura 6.2	Fisura B en modo 3	121

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Comparación de los modos longitudinales	20
Tabla 2. Comparación de los modos torsores	23
Tabla 3. Comparación de los modos flectores	27
Tabla 4. Propiedades de los mallados empleados en el análisis de sensibilidad	48
Tabla 5. Variaciones porcentuales entre los distintos mallados	50
Tabla 6. Propiedades del mallado definitivo	50
Tabla 7. Modos a analizar.....	52
Tabla 8. Profundidades y longitudes de las grietas	56
Tabla 9. Elección del número de bloques	63
Tabla 10. Frecuencias del eje sin fisuras	68
Tabla 11. Frecuencias de los modos flectores para la fisura A20	69
Tabla 12. Frecuencias de los modos torsores para la fisura A20.....	69
Tabla 13. Frecuencias de los modos longitudinales para la fisura A20.....	70
Tabla 14. Frecuencias de los modos flectores para la fisura A40	70
Tabla 15. Frecuencias de los modos torsores para la fisura A40.....	71
Tabla 16. Frecuencias de los modos longitudinales para la fisura A40.....	71
Tabla 17. Frecuencias de los modos flectores para la fisura A60	72
Tabla 18. Frecuencias de los modos torsores para la fisura A60.....	72
Tabla 19. Frecuencias de los modos longitudinales para la fisura A60.....	73
Tabla 20. Frecuencias de los modos flectores para la fisura A80	73
Tabla 21. Frecuencias de los modos torsores para la fisura A80.....	74
Tabla 22. Frecuencias de los modos longitudinales para la fisura A80.....	74
Tabla 23. Frecuencias de los modos flectores para la fisura A100	75
Tabla 24. Frecuencias de los modos torsores para la fisura A100.....	75
Tabla 25. Frecuencias de los modos longitudinales para la fisura A100.....	76
Tabla 26. Frecuencias de los modos flectores para la fisura B20.....	76
Tabla 27. Frecuencias de los modos torsores para la fisura B20.....	77
Tabla 28. Frecuencias de los modos longitudinales para la fisura B20.....	77
Tabla 29. Frecuencias de los modos flectores para la fisura B40.....	78
Tabla 30. Frecuencias de los modos torsores para la fisura B40.....	78
Tabla 31. Frecuencias de los modos longitudinales para la fisura B40.....	79
Tabla 32. Frecuencias de los modos flectores para la fisura B60.....	79

Tabla 33. Frecuencias de los modos torsores para la fisura B60.....	80
Tabla 34. Frecuencias de los modos longitudinales para la fisura B60.....	80
Tabla 35. Frecuencias de los modos flectores para la fisura B80.....	81
Tabla 36. Frecuencias de los modos torsores para la fisura B80.....	81
Tabla 37. Frecuencias de los modos longitudinales para la fisura B80.....	82
Tabla 38. Frecuencias de los modos flectores para la fisura B100.....	82
Tabla 39. Frecuencias de los modos torsores para la fisura B100.....	83
Tabla 40. Frecuencias de los modos longitudinales para la fisura B100.....	83
Tabla 41. Ángulos θ de las diferentes fisuras	88
Tabla 42. Áreas de las secciones fisuradas	89
Tabla 43. Momentos de inercia de las secciones fisuradas	90
Tabla 44. Módulo de torsión de las distintas secciones.....	91
Tabla 45. Centros de gravedad de las secciones fisuradas a lo largo del eje y.....	92
Tabla 46. Variación respecto al modelo 3D en la fisura A20.....	106
Tabla 47. Variación respecto al modelo 3D en la fisura A40.....	107
Tabla 48. Variación respecto al modelo 3D en la fisura A60.....	108
Tabla 49. Variación respecto al modelo 3D en la fisura A80.....	109
Tabla 50. Variación respecto al modelo 3D en la fisura A100.....	110
Tabla 51. Variación respecto al modelo 3D en la fisura B20.....	111
Tabla 52. Variación respecto al modelo 3D en la fisura B40.....	112
Tabla 53. Variación respecto al modelo 3D en la fisura B60.....	113
Tabla 54. Variación respecto al modelo 3D en la fisura B80.....	114
Tabla 55. Variación respecto al modelo 3D en la fisura B100.....	115
Tabla 56. Distinción entre nodos y antinodos en las fisuras A y B	119
Tabla 57. Tiempos de análisis para la fisura A100.....	124

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1 INTRODUCCIÓN

Actualmente el ferrocarril, tanto en transporte de personas como de mercancías, es uno de los medios de transporte más empleado. Éste constituye un elemento básico de comunicación, tanto a nivel urbano, como provincial o internacional.

Dentro de los ferrocarriles, un elemento muy a tener en cuenta son los ejes, los cuales se encargan de transmitir la energía a las ruedas. En este elemento se va a centrar el presente proyecto, ya que es muy propenso a sufrir daños, como fisuras o grietas, las cuales pueden provocar una catástrofe. Este tipo de daños se da con mayor frecuencia y es más peligroso en líneas de alta velocidad, por lo tanto en ellas se debe prestar mayor atención a la detección de daños superficiales.

Un eje ferroviario durante su vida útil está expuesto a diferentes cargas, las cuales por sí solas no suelen provocar el fallo, pero en el caso de que el eje posea una grieta, ésta puede provocar la rotura, y provocar cuantiosos daños, tanto materiales como personales. Asumiendo que durante el servicio del eje se pueden formar fisuras, éstas deben poder ser detectadas antes de que alcancen su tamaño crítico. Esto se lleva a cabo mediante la planificación de programas de inspección apropiados.

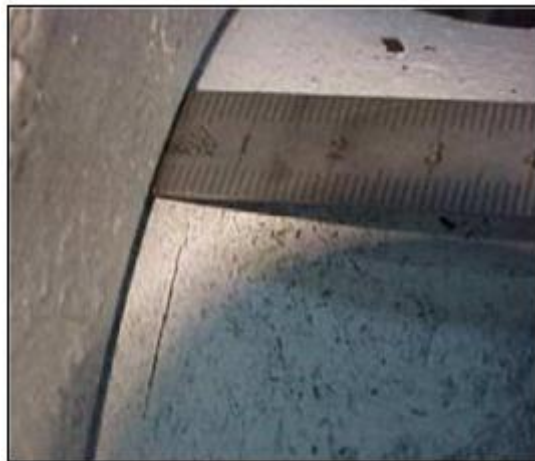


Figura 1.1 Grieta real en un eje ferroviario

La mayoría de las grietas son difíciles de reconocer con técnicas de inspección visual, por lo que se recurre a técnicas de ensayos no destructivos (END), tales como: ultrasonidos, rayos X, líquidos penetrantes, corrientes magnéticas, etc. En los últimos 30 años se han intentado desarrollar técnicas más efectivas para detectar fallos

estructurales, ya que las anteriores a veces resultan engorrosas y complejas de llevar a cabo.

De estas nuevas técnicas, una de las más prometedoras ha sido la que involucra el análisis modal, el cual se basa en el estudio de las frecuencias naturales y los modos de vibración del eje. El método se fundamenta en el hecho de que un defecto en un eje reduce la rigidez y el amortiguamiento, además de otros parámetros que son menos perceptibles como la masa. Al variar la rigidez y el amortiguamiento varía la frecuencia natural, y también los desplazamientos de cada punto del eje.

Este tipo de análisis será el que se lleve a cabo en los diferentes problemas que componen este estudio, con vistas a que en un futuro este método de detección de fisuras haga más sencillo y barato el mantenimiento de los ejes ferroviarios. Con este nuevo método se pretende obtener unos resultados muy fiables, además de un mantenimiento limpio, sencillo y más barato.

1.2 OBJETIVOS

Lo primero que se debe explicar para entender la distribución del presente proyecto es que éste está compuesto por dos problemas distintos:

- El primer problema que se plantea es el análisis modal de un eje ferroviario simplificado en 3D. A este eje se le generarán diferentes fisuras planas, a diferentes profundidades y en distintas zonas.
- En el segundo problema se realizará una aproximación del mismo eje fisurado mediante elementos unidimensionales.

Ambos problemas se llevarán a cabo mediante la herramienta de elementos finitos Abaqus/CAE.

1.2.1 Objetivos del primer problema. Análisis modal de un eje fisurado

Como ya se ha explicado en la introducción, los ejes ferroviarios son muy propensos a sufrir daños superficiales. Debido al tipo de cargas que sufren, y a su función dentro del ferrocarril estos daños deben ser detectados cuanto antes para así poder sustituir el eje defectuoso por uno en perfectas condiciones.

En cuanto al primer problema se refiere en este proyecto se van a abordar varios objetivos:

- Dado que ya es sabido que la frecuencia de un eje fisurado es diferente a la de un eje en perfectas condiciones, el objetivo del presente proyecto es cuantificar esa variación, para saber si así en un futuro este tipo de análisis podría ser llevado a cabo en labores de mantenimiento con una elevada fiabilidad.
- Analizar cómo actúan los diferentes modos de vibración. Estudiar si las variaciones dependen del tipo de modo que se emplee en el análisis o si por el contrario esto no afecta a la frecuencia.
- Comprobar la importancia que tienen en un análisis modal los nodos y los antinodos, ya que dependiendo de la situación de la grieta y de estos nodos o antinodos la frecuencia puede variar en mayor o menor magnitud.

- Por último, otro objetivo del presente estudio es el evaluar la capacidad de la herramienta Abaqus/CAE en este tipo de análisis. Los resultados de este proyecto podrán servir como datos de partida o referencia para futuros estudios, Trabajos de Fin de Grado o para validar la capacidad del programa en ensayos reales.

1.2.2 Objetivos del segundo problema. Equivalencia entre un eje unidimensional y un eje 3D

El presente problema surge por la dificultad que supone el análisis de un eje en 3D, sobre todo a la hora de realizar el mallado y en cuanto al tiempo de análisis.

La principal diferencia entre los dos modelos (modelo 3D y modelo unidimensional) reside en el número de nodos y como consecuencia en el número de grados de libertad que conforman el mallado. El modelo 3D está formado en su mayoría por elementos hexaédricos, de los cuales cada uno contiene 8 nodos. Este tipo de elementos puede tener hasta 48 grados de libertad. Por otra parte, el modelo unidimensional, está formado por elementos lineales, los cuales tan solo contienen dos nodos, uno en cada extremo, por lo tanto tan solo cuentan con 12 grados de libertad. Con esto se consigue que el número de grados de libertad del modelo unidimensional sea muy inferior al tridimensional, y esto se transforma en una reducción considerable del tiempo de análisis.

Teniendo en cuenta estas ideas, se realizará el mismo tipo de análisis sobre los dos modelos, para así comprobar hasta qué punto pueden llegar a ser equivalentes estos dos diseños.

En cuanto a este segundo problema, en el presente proyecto se perseguirán los siguientes objetivos:

- Analizar las frecuencias de vibración del eje unidimensional, y comprobar si éstas alcanzan algún tipo de convergencia al disminuir la longitud de la sección de la fisura.
- En caso de que se cumpla el objetivo anterior, y las frecuencias lleguen a converger, se cuantificará la variación entre el valor de la frecuencia que haya

convergiendo en el segundo problema con la frecuencia obtenida en el primer problema. Obviamente se compararán valores de frecuencias obtenidas para las mismas fisuras (misma situación y misma profundidad). Con esto se podría contemplar la posibilidad de realizar análisis sobre ejes unidimensionales, en vez de recurrir a los diseños habituales.

- Analizar cómo influyen los diferentes modos de vibración. Estudiar si las variaciones dependen del tipo de modo que se emplee en el análisis o si por el contrario esto no afecta a la frecuencia.

CAPÍTULO 2

INTRODUCCIÓN A LAS VIBRACIONES MECÁNICAS

2.1 VIBRACIONES MECÁNICAS

En el mundo de la ingeniería es importante conocer cómo va a responder un sistema mecánico al estar sometido a una serie de cargas externas para así poder realizar un diseño adecuado de dicho sistema. Las vibraciones son un aspecto a tener en cuenta ya que pueden provocar la rotura de ciertos elementos y por lo tanto hay que ser muy cuidadosos para conseguir un diseño en el que se minimice el efecto de este fenómeno.

Una vibración mecánica es la oscilación repetida de un punto material o de un cuerpo rígido en torno a su posición de equilibrio.

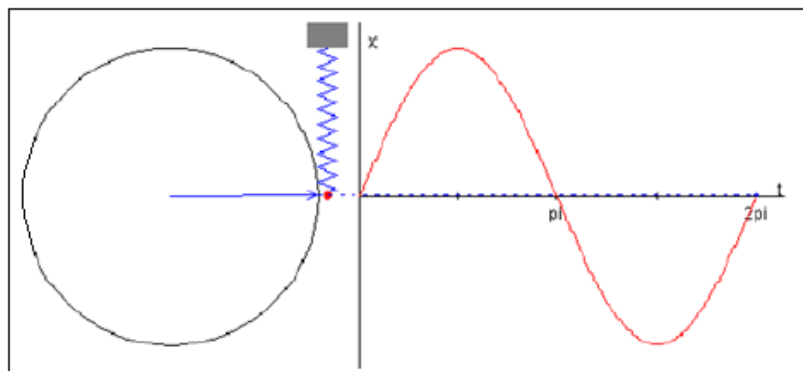


Figura 2.1 Representación de una vibración armónica

Las vibraciones se pueden producir por efecto del propio funcionamiento de una máquina o un equipo. En toda oscilación vibratoria, en general, se producen tres fenómenos energéticos:

- Almacenamiento de energía potencial en los elementos elásticos.
- Almacenamiento de energía cinética en las masas e inercias.
- Pérdida gradual de energía en los elementos disipativos.

El análisis de vibraciones es una de las herramientas más usadas en el mantenimiento de máquinas, de tal manera que el estudio de las vibraciones mecánicas es esencial ya que permite comprender, analizar y proponer soluciones sobre diversos problemas que pueden surgir en los procesos industriales.

2.1.1 Conceptos básicos

Para poder comprender el fenómeno de la vibración se deben conocer algunos conceptos. A continuación se expone una breve descripción de los más importantes:

- **Amplitud de onda**
Es la medida de la variación máxima de una partícula con respecto a su posición de equilibrio. En una onda mecánica o vibración se mide en unidades de longitud.
- **Frecuencia**
Indica el número de veces que una partícula oscilante pasa por la misma posición en un segundo. Se mide en hertzios (Hz).
- **Periodo**
Es la inversa de la frecuencia, es decir, el intervalo de tiempo que tarda una partícula oscilante en pasar por una posición equivalente. Se mide en segundos (s).
- **Velocidad de propagación**
Es la velocidad a la que se propaga una onda determinada, depende del medio por el que se propaga.
- **Vibraciones libres**
Son aquellas que se producen en ausencia de fuerzas externas al sistema.
- **Vibraciones forzadas**
Vibraciones que tienen lugar debido a la presencia de fuerzas externas que varían en el tiempo.
- **Grados de libertad**
Se refiere a la cantidad mínima de números reales que es necesario especificar para determinar completamente el estado físico de una partícula o sistema de partículas. En mecánica, por cada partícula libre del sistema y por cada dirección

en la que éste sea capaz de moverse existen dos grados de libertad, uno relacionado con la posición y otro con la velocidad.

- **Modos de vibración**

Es un patrón o forma característica en el que vibrará un sistema mecánico. Una de las tareas del análisis modal es determinar la forma de estos modos. La vibración de una estructura es una combinación de todos los modos de vibración, aunque no todos están excitados al mismo grado. En este trabajo se van a distinguir tres modos distintos de vibración: longitudinales, flectores y torsores.

- **Frecuencia natural o frecuencia propia**

En sistemas de un grado de libertad es la frecuencia del movimiento armónico que resulta al introducir un desplazamiento o una velocidad inicial, que se encuentra en posición de equilibrio y se deja vibrar libremente sin ningún tipo de amortiguador. En sistemas de N grados de libertad cada modo natural de vibración tiene una frecuencia natural asociada, la cual es la del movimiento armónico resultante.

- **Frecuencia de excitación**

Es la frecuencia asociada a una acción exterior que actúa sobre el sistema y que varía armónicamente. Si la frecuencia natural de un sistema y la frecuencia de excitación coinciden se dice que el sistema se encuentra en resonancia.

- **Movimiento armónico simple**

Es un movimiento periódico, oscilatorio y vibratorio en ausencia de fricción bajo la acción de una fuerza recuperadora elástica, proporcional al desplazamiento y en ausencia de todo rozamiento.

- **Nodos**

Un nodo es un punto que permanece fijo en un cuerpo vibrante. Por lo tanto se trata del punto de una onda estacionaria que tiene una amplitud nula en cualquier momento.

- Antinodos

Al contrario, el antinodo es un punto cuya posición varia con el tiempo, y además su amplitud es la máxima que se alcanza en todo el cuerpo.

2.2 TIPOS DE VIBRACIONES

Tanto desde un punto teórico como práctico es posible dividir las vibraciones mecánicas en varios grupos. Es conveniente conocer los distintos tipos de vibraciones y sus características.

Las vibraciones se dividen en dos grandes grupos:

- Vibraciones deterministas: son aquellas que se pueden describir mediante expresiones matemáticas que definen la forma en que el valor instantáneo varía con el tiempo.
- Vibraciones aleatorias: únicamente se pueden describir empleando parámetros estadísticos. Las señales aleatorias se dividen en estacionarias y no estacionarias.

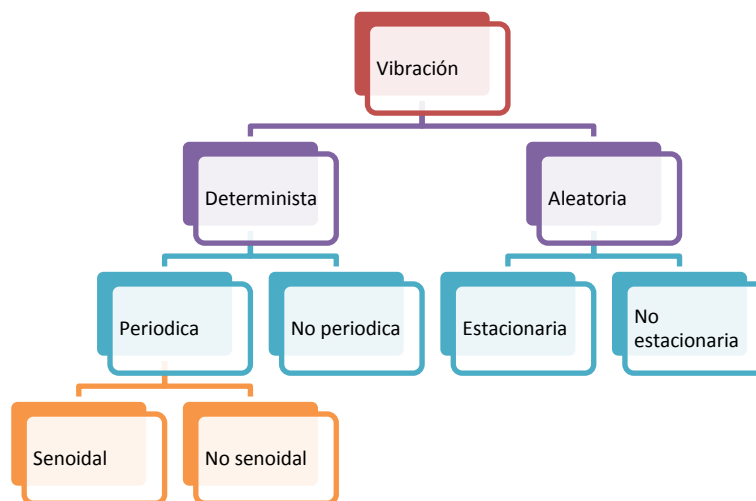


Figura 2.2 Distintos tipos de vibraciones

2.2.1 Vibración determinista

Las señales deterministas tienen un contenido de frecuencias y de nivel relativamente constantes por un largo periodo de tiempo. Dichas señales suelen ser generadas por maquinaria rotativa, instrumentos musicales y generadores de funciones eléctricas. Se pueden dividir en señales periódicas y no periódicas.

Las señales deterministas son probablemente las más importantes en el análisis de vibraciones y sus espectros se ven así:



Figura 2.3 Espectro de una señal determinista periódica



Figura 2.4 Espectro de una señal determinista no periódica

Vibración determinista periódica

El movimiento periódico se puede considerar como un movimiento de oscilación alrededor de una posición fija de referencia, donde la curva de movimiento se repite cada cierto tiempo, lo que ya se ha definido como periodo. El tipo más simple de función periódica es el movimiento armónico, en el que la función se puede representar por medio de una onda senoidal:

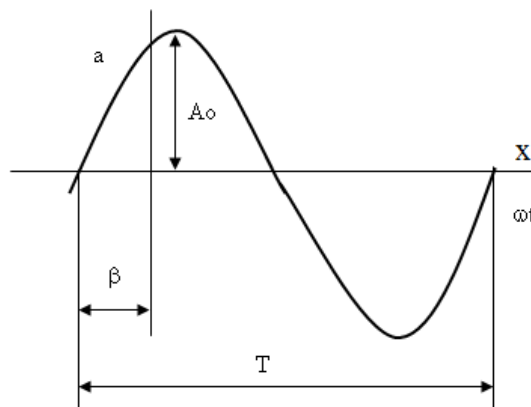


Figura 2.5 Representación de una onda senoidal

$$x = A \sin(\omega t)$$

donde:

- x es el desplazamiento instantáneo de la partícula [m].
- A es la amplitud máxima de la vibración [m].
- ω es la frecuencia angular [rad/seg].

La mayoría de las vibraciones que se aprecian en la realidad no son movimientos armónicos puros, aunque muchas de ellas se pueden considerar como periódicas.

Vibración determinista no periódica

La vibración no periódica no cumple con patrones que se repitan constantemente y es complicado detectar donde comienza un ciclo y donde termina. Estas vibraciones están asociadas generalmente a fenómenos transitorios y choques mecánicos. Un choque mecánico se traduce en una repentina aceleración o desaceleración, cualquier tipo de contacto directo entre dos cuerpos provoca un choque. Lo que lo caracteriza es la duración del contacto, la cual generalmente es muy corta, por lo tanto se transmite la mayor cantidad de energía entre los cuerpos.

En la mayoría de los casos no es la forma del impulso lo que tiene interés, sino más bien su efecto sobre un cierto objeto o sistema. Lo más práctico en estos casos es realizar un análisis en el dominio de la frecuencia.

2.2.2 Vibración aleatoria

Al igual que la vibración determinista no periódica, la vibración aleatoria no cumple con patrones que se repitan de manera periódica. Para obtener una descripción completa de este proceso vibratorio, debería hacerse un registro de la señal durante un tiempo lo suficientemente grande, en la teoría infinito; en un caso real la medida de la señal se hace para un tiempo finito.

El estudio de las vibraciones aleatorias consiste en averiguar de qué forma las características estadísticas del movimiento de un sistema aleatoriamente excitado

dependen de las características estadísticas de la excitación y de las propiedades dinámicas del sistema vibrante.

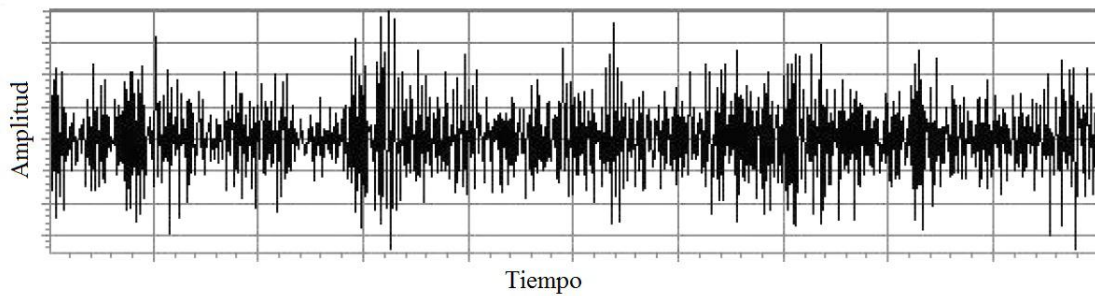


Figura 2.6 Señal de una vibración aleatoria

Ya que la onda varía sin seguir un patrón concreto se trata de una señal no estacionaria, puesto que sus propiedades estadísticas cambian a lo largo del tiempo. Una de estas propiedades es la media, la cual será distinta de cero, al contrario que en una onda senoidal.

Otro parámetro característico de estas señales es el valor cuadrático medio, también llamado varianza, el cual nos da una idea de la magnitud de las fluctuaciones de la señal. También se debe tener en cuenta cómo cambia de rápido el valor de la señal.

Al analizar una vibración aleatoria la cuestión es cuántas muestras o cuánto tiempo tenemos que observar una señal aleatoria hasta que sus variables estadísticas más significativas puedan ser evaluadas.

2.3 EL ANÁLISIS MODAL

El análisis modal es una técnica utilizada para determinar las características vibratorias de una estructura con comportamiento elástico y lineal, nos suministra las frecuencias y formas naturales con las que vibra una estructura una vez que la sollicitación inicial ha desaparecido. Es el tipo de análisis dinámico más importante, y debe de hacerse siempre antes de cualquier otro análisis, pues las características vibratorias de una estructura determinan cómo responde ante las cargas dinámicas.

Supongamos un sistema de un solo grado de libertad, por ejemplo un carrito con ruedas de masa m y en paralelo al suelo y sujetos a la pared un muelle de rigidez k y un amortiguamiento con rozamiento viscoso c como el representado en la Figura 2.7.

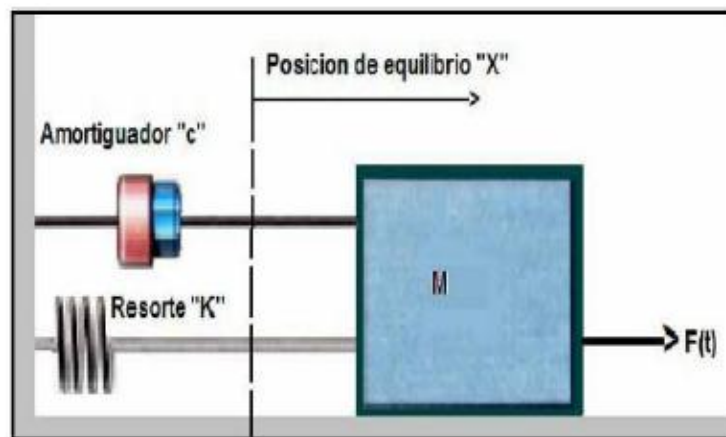


Figura 2.7 Esquema de un sistema de 1 Grado de Libertad

Si sometemos el sistema a una excitación, éste responderá vibrando de una determinada manera, propia y exclusiva del sistema concreto. Esta respuesta se podrá expresar en un gráfico desplazamiento-frecuencia, (puede no ser armónico, pero que puede descomponerse por la transformada de Fourier en varias funciones armónicas).

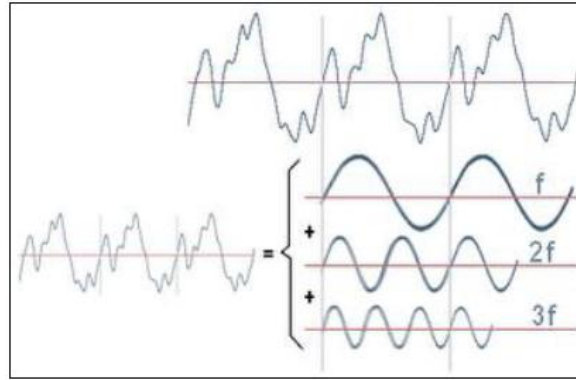


Figura 2.8 Descomposición de una onda

A esta vibración la llamaremos modo de vibración del sistema, y a su frecuencia natural ω_n del sistema. Cada modo tendrá una forma propia de vibración. La frecuencia natural del sistema ω_n se define según la siguiente expresión:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Es decir, sólo depende de los parámetros dinámicos del sistema.

Si realizamos esta misma operación con todos los posibles sistemas de un grado de libertad obtendremos todos los modos de vibración y sus formas, así como sus frecuencias naturales.

Las estructuras al vibrar lo hacen como una combinación de modos fundamentales de vibración de sistemas de un grado de libertad, pudiéndose entender la estructura como una superposición de muchos sistemas de un grado de libertad.

La forma de vibrar de un sistema de n grados de libertad es una combinación de n sistemas de un G.D.L.

Como ejemplo se van a analizar los distintos tipos de vibraciones sobre una barra de manera analítica [2]. Estos valores se compararán con los obtenidos mediante el código Abaqus CAE.

Para calcular las frecuencias de manera analítica se hace necesario el adelantar algunas propiedades del eje, las cuales serán explicadas más adelante con mayor detalle. Las propiedades necesarias son:

- Módulo de elasticidad, $E = 210 \text{ GPa}$.
- Densidad, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$.
- Módulo de cizalladura, $G = 80 \text{ GPa}$.
- Longitud de la barra, $l = 1,454 \text{ m}$.
- Área, $A = 0,02545 \text{ m}^2$.
- Momento de inercia de la sección transversal, $I = 5,1529 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$.

2.3.1 Vibraciones longitudinales sobre una barra

Se van a estudiar las vibraciones longitudinales sobre una barra de sección variable, aunque más adelante se llevarán a cabo las simplificaciones correspondientes a una de sección fija.

Analizando una barra elástica de longitud l con un área de la sección transversal variable $A(x)$, como la mostrada en la Figura 2.9, la igualdad de la tensión a la que está sometido un elemento viene dada por:

$$P = \sigma A = EA \frac{\delta u}{\delta x}$$

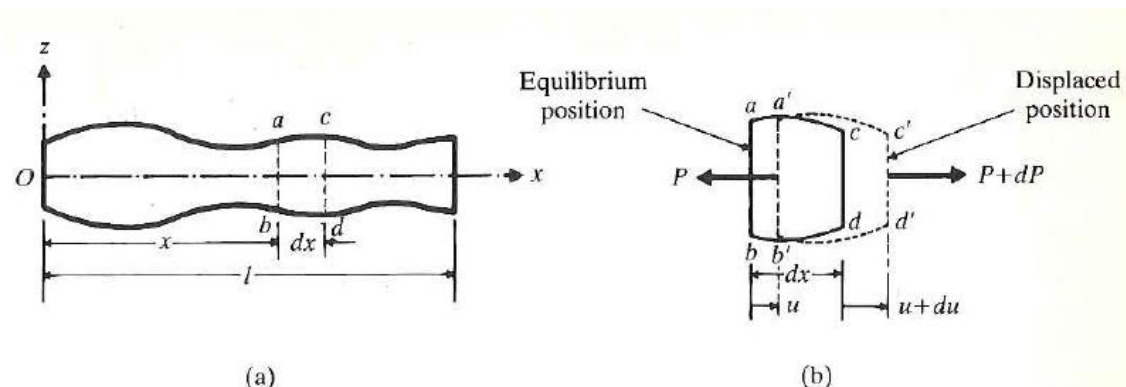


Figura 2.9 Vibraciones longitudinales sobre una barra

Si $f(x,t)$ denota la fuerza externa por unidad de longitud, el sumatorio de fuerzas en la dirección x de un pequeño elemento de la barra (Figura 2.9 b) se representa en la siguiente ecuación del movimiento:

$$(P + dP) + f dx - P = \rho A dx \frac{\delta x^2}{\delta t^2}$$

Usando la relación $dP = (\delta P / \delta x)$ y la ecuación de la tensión ya nombrada, la ecuación del movimiento para las vibraciones longitudinales puede expresarse como:

$$\frac{\delta}{\delta x} \left[EA(x) \frac{\delta u(x,t)}{\delta x} \right] + f(x,t) = \rho(x) A(x) \frac{\delta^2 u}{\delta t^2}(x,t)$$

Realizando las simplificaciones oportunas para una barra de sección transversal constante, como es el caso, la ecuación queda:

$$EA \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}(x,t) + f(x,t) = \rho A \frac{\delta^2 u}{\delta t^2}(x,t)$$

Asumiendo que $f=0$, puesto que se está trabajando con vibraciones libres, la ecuación anterior se simplifica quedando:

$$c^2 \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}(x,t) = \frac{\delta^2 u}{\delta t^2}(x,t)$$

donde c representa la velocidad de propagación de las ondas longitudinales, la cual depende del material, como se observa en la siguiente ecuación:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Sustituyendo c en la expresión, y resolviendo la ecuación diferencial se llega a la siguiente solución:

$$u(x,t) = U(x)T(t) \equiv \left(A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c} \right) (C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t))$$

Aplicando las condiciones de contorno para barra empotrada, la cual es el caso de estudio de este proyecto, se obtiene la expresión de la velocidad angular de los modos de vibración:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$$

donde n representa el número de modo de vibración longitudinal, y para obtener la frecuencia natural de vibración basta con recurrir a la siguiente ecuación:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

En la Tabla 1 se comparan los resultados obtenidos para los cinco primeros modos longitudinales de la barra a analizar.

Tabla 1. Comparación de los modos longitudinales

Nº de Modo	Frecuencia (Hz) [Analítica]	Frecuencia (Hz) [Abaqus]	Variación (%)
1	1778,6	1788,4	0,55
2	3557,2	3567,7	0,29
3	5335,8	5327,7	0,15
4	7114,4	7055,5	0,83
5	8893	8734,3	1,78

Como se puede observar la diferencia entre los dos métodos de cálculo es mínima para este tipo de vibraciones.

2.3.2 Vibraciones torsionales sobre una barra

En la Figura 2.10 se muestra una barra de sección variable sometida a un momento torsor provocado por $f(x,t)$. Si $\theta(x,t)$ representa el ángulo de giro de la sección transversal, la relación entre la desviación de la sección y el momento torsor $M_t(x,t)$ viene dada por:

$$M_t(x, t) = GJ \frac{\delta \theta}{\delta x}(x, t)$$

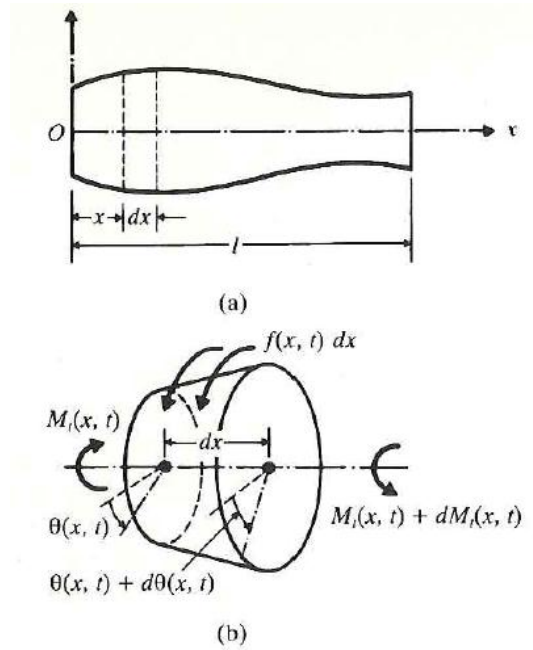


Figura 2.10 Vibraciones torsionales sobre una barra

donde G es el módulo a cizalladura del material y J es el momento polar de inercia de la sección transversal. Si el momento polar de inercia en referencia a la masa es I_o , la inercia de un esfuerzo de torsión en un elemento de longitud dx viene dada por:

$$I_o dx \frac{\delta^2 \theta}{\delta t^2}$$

Si un esfuerzo de torsión $f(x, t)$ actúa en el eje de la barra, aplicando la segunda ley de Newton en referencia a giros se obtiene la siguiente expresión:

$$(M_t + dM_t) + f dx - M_t = I_o dx \frac{\delta^2 \theta}{\delta t^2}$$

expresando dM_t como:

$$dM_t = \frac{\delta M_t}{\delta x} dx$$

Y usando la fórmula que relaciona el giro con el momento, se obtiene la ecuación para vibraciones torsionales de una barra con sección variable:

$$\frac{\delta}{\delta x} \left[GJ(x) \frac{\delta \theta}{\delta x}(x, t) \right] + f(x, t) = I_o(x) \frac{\delta^2 \theta}{\delta t^2}(x, t)$$

Para una barra con sección uniforme se obtiene la ecuación simplificada:

$$GJ \frac{\delta^2 \theta}{\delta x^2}(x, t) + f(x, t) = I_o \frac{\delta^2 \theta}{\delta t^2}(x, t)$$

en la cual, en caso de vibraciones libres ($f=0$), se reduce a:

$$c^2 \frac{\delta^2 \theta}{\delta x^2}(x, t) = \frac{\delta^2 \theta}{\delta t^2}(x, t)$$

donde c es la velocidad de propagación de las ondas en vibraciones torsionales:

$$c = \sqrt{\frac{GJ}{I_o}}$$

Si la barra tiene una sección uniforme, como es el caso, $I_o = \rho J$, la ecuación anterior queda:

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Sustituyendo c en la expresión, y resolviendo la ecuación diferencial correspondiente se llega a la siguiente solución para hallar el giro de la barra:

$$\theta(x, t) = \left(A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sen \frac{\omega x}{c} \right) (C \cos \omega t + D \sen \omega t)$$

Aplicando las mismas condiciones de contorno que en el caso anterior, las de barra empotrada, se obtiene la expresión de la velocidad angular de los modos de vibración:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$$

donde n representa el número de modo de vibración torsional, y para obtener la frecuencia natural de vibración basta con recurrir a la siguiente ecuación:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

De nuevo se van a comparar los resultados analíticos de los modos torsionales a los mismos obtenidos mediante el programa Abaqus/CAE. Estos resultados aparecen reflejados en la Tabla 2.

Tabla 2. Comparación de los modos torsores

Nº de Modo	Frecuencia (Hz) [Analítica]	Frecuencia (Hz) [Abaqus]	Variación (%)
1	1097,8	1097,2	0,05
2	2195,6	2194,3	0,06
3	3293,4	3291,1	0,07
4	4391,2	4387,6	0,08
5	5489	5483,5	0,1
6	6586,8	6578,8	0,12

Para las vibraciones torsionales también existe una variación mínima entre el cálculo analítico y el cálculo por medio del programa.

2.3.3 Vibraciones laterales sobre una viga

Considérese un elemento libre de una barra como la mostrada en la Figura 2.11, donde $M(x,t)$ es el momento flector al que está sometido, $V(x,t)$ es el esfuerzo cortante, y $f(x,t)$ es la fuerza externa por unidad de longitud a la que está sometida la barra.

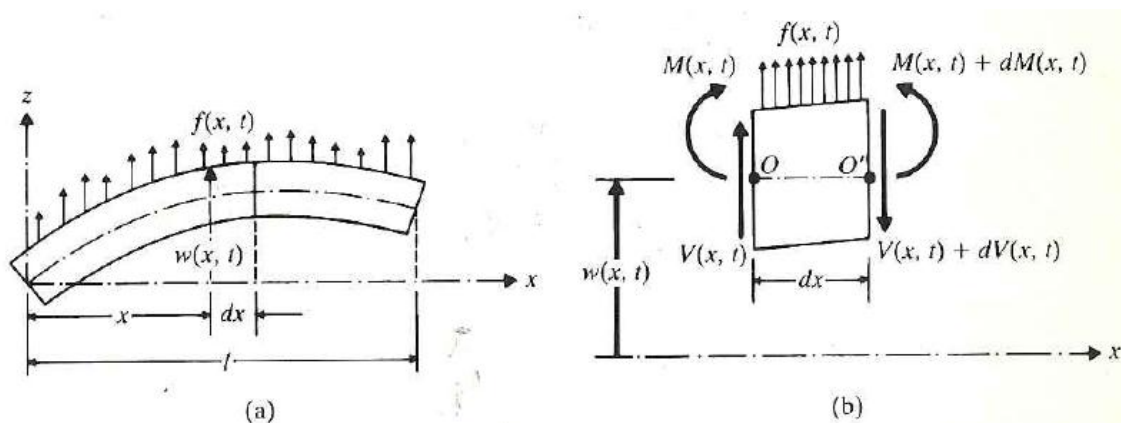


Figura 2.11 Viga en flexión

Puesto que la fuerza de inercia que actúa sobre el elemento de la viga es:

$$\rho A(x) dx \frac{\delta^2 w}{\delta t^2}(x, t)$$

en la que $\delta^2 w / \delta t^2$ corresponde a la aceleración. Mediante un sumatorio de fuerzas se llega a la ecuación de la fuerza del movimiento en la dirección z , la cual viene a ser:

$$-(V + dV) + f(x, t) dx + V = \rho A(x) dx \frac{d^2 w}{dt^2}(x, t)$$

donde ρ es la densidad y $A(x)$ es el área de la sección transversal de la barra. La ecuación del movimiento del sumatorio de momentos sobre el eje y y calculada desde el punto 0 es:

$$(M + dM) - (V + dV) dx + f(x, t) dx \frac{dx}{2} - M = 0$$

Por definición:

$$dV = \frac{\delta V}{\delta x} dx \quad dM = \frac{\delta M}{\delta x} dx$$

Y sin tener en cuenta términos a los que afecten fuerzas externas en dx las ecuaciones del movimiento quedan de la siguiente forma:

$$-\frac{\delta V}{\delta x}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\delta^2 w}{\delta t^2}(x, t)$$

$$\frac{\delta M}{\delta x}(x, t) - V(x, t) = 0$$

Usando la relación $V = \delta M / \delta x$ que se obtiene de la ecuación anterior, la ecuación de los esfuerzos cortantes queda:

$$-\frac{\delta^2 M}{\delta x^2}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\delta^2 w}{\delta t^2}(x, t)$$

De la teoría elemental de flexión de vigas se obtiene la relación entre momento de flexión y desviación:

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\delta^2 w}{\delta x^2}(x, t)$$

donde E es el módulo de Young e $I(x)$ es el momento de inercia de la sección transversal sobre el eje y . Introduciendo la ecuación anterior en la ecuación de los esfuerzos cortantes queda:

$$\frac{\delta^2}{\delta x^2} \left[EI(x) \frac{\delta^2 w}{\delta x^2}(x, t) \right] + \rho A(x) \frac{\delta^2 w}{\delta t^2}(x, t) = f(x, t)$$

Para una barra de sección uniforme la ecuación anterior se reduce a:

$$EI \frac{\delta^4 w}{\delta x^4}(x, t) + \rho A \frac{\delta^2 w}{\delta t^2}(x, t) = f(x, t)$$

Para vibraciones libres, con $f(x, t) = 0$, la ecuación queda:

$$c^2 \frac{\delta^4 w}{\delta x^4}(x, t) + \frac{\delta^2 w}{\delta t^2}(x, t) = 0$$

donde:

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

Ya que la ecuación de movimiento está derivada en segundo orden respecto al tiempo y en cuarto orden respecto a x , se necesitan dos condiciones iniciales y cuatro condiciones de contorno para encontrar una solución única para $w(x, t)$. Por lo general el valor del desplazamiento lateral y la velocidad están especificadas como $w_o(x)$ y $\dot{w}_o(x)$ en el instante inicial $t=0$, por lo tanto las condiciones iniciales serán:

$$w(x, t = 0) = w_o(x)$$

$$\frac{\delta w}{\delta t}(x, t = 0) = \dot{w}_o(x)$$

La solución para vibraciones libres se puede obtener mediante el método de separación de variables como:

$$w(x, t) = W(x)T(t)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación para vibraciones libres y reordenando términos queda:

$$\frac{c^2}{W(x)} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = -\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = a = \omega^2$$

donde $a = \omega^2$ es una constante positiva. La ecuación anterior puede escribirse como dos ecuaciones:

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \beta^4 W(x) = 0$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0$$

donde

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI}$$

La solución de la ecuación general puede expresarse como:

$$T(t) = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t$$

Donde A y B son constantes que se obtienen de las condiciones iniciales. Para la solución de la ecuación se asume:

$$W(x) = C e^{sx}$$

donde C y s son constantes, y derivando la ecuación auxiliar se obtiene:

$$s^4 - \beta^4 = 0$$

Las raíces de la ecuación son dos reales y dos imaginarias:

$$s_{1,2} = \pm \beta \quad s_{3,4} = \pm i\beta$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación $W(x) = C e^{sx}$ es:

$$W(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x}$$

donde C_1 , C_2 , C_3 y C_4 son diferentes constantes. Estas constantes se obtienen de las condiciones de contorno. De la ecuación en la que se obtiene β se puede despejar la velocidad angular:

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

Para cualquier barra habrá un número infinito de modos de vibración, con una frecuencia natural asociada a cada uno de esos modos. Las constantes desconocidas, C_1 , C_2 , C_3 y C_4 , y el valor de β se obtienen de las condiciones de contorno. Para calcular la frecuencia se hace necesario conocer los valores de β , cuyos cuatro primeros valores son:

$$\beta_1 l = 4,73; \beta_2 l = 7,85; \beta_3 l = 10,99; \beta_4 l = 14,14$$

Una vez obtenida la velocidad angular, mediante la siguiente expresión se obtienen las frecuencias naturales de los cuatro primeros modos flectores:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

En la Tabla 3 se muestran las frecuencias obtenidas y la variación respecto a las halladas mediante el programa de elementos finitos para los cuatro primeros modos flectores.

Tabla 3. Comparación de los modos flectores

Nº de Modo	Frecuencia (Hz) [Analítica]	Frecuencia (Hz) [Abaqus]	Variación (%)
1	391,98	367,95	6,13
2	1079,67	938,29	13,09
3	2116,15	1688,8	20,19
4	3503,09	2556	27,03

Como se puede observar las variaciones son más elevadas que en el resto de vibraciones estudiadas. Esto se debe a que este planteamiento es para vigas delgadas, mientras que el eje sometido a estudio es más bien una viga gruesa.

2.4 TÉCNICAS DE DIAGNÓSTICO UTILIZANDO EL ANÁLISIS MODAL

En la actualidad el efecto de la resonancia mecánica se emplea en técnicas que utilizan este fenómeno como herramienta para detectar problemas muy habituales en ingeniería, tales como la rotura de elementos por fatiga o el hallazgo de fisuras.

A continuación se describe una técnica desarrollada por primera vez en Estados Unidos, la cual también aparece como estado del arte en el proyecto WIDEM (Wheel set Integrated Design and Effective Maintenance), que ha sido realizado de forma conjunta por algunas de las empresas mas influyentes del sector ferroviario y financiado en gran medida por la Unión Europea [10].

2.4.1 Process Compensated Resonance Testing (PCRT)

Cualquier modificación en una estructura crea un cambio en el comportamiento modal de la misma, ya sea en una o más de las frecuencias propias, o incluso una perturbación en los modos de vibración. Si hay una grieta, inicio de grieta, inclusión, hoyo, capa de óxido, etc., habrá cambios en las frecuencias propias, e incluso diferentes modos pueden ser afectados de forma distinta. Generalmente, una imperfección causará que la frecuencia natural se vea reducida, debido a que el material es habitualmente menos rígido cuando está presente una falla. Este fenómeno es el que permite a la tecnología *Process Compensated Resonance Testing* (PCRT) buscar cambios estructurales determinantes a través del estudio de las frecuencias propias de un elemento en sus modos de vibración.

Las técnicas PCRT son relativamente nuevas dentro de las técnicas de ensayos no destructivos (END). La tecnología subyacente fue desarrollada a finales de la década de los 80, desde entonces ha sido comercializada y empleada exitosamente en diversos sectores de la ingeniería (automoción, aeronáutica, etc.)

La espectroscopia de resonancia, es decir el análisis de las frecuencias de resonancia de un componente, ha sido empleada para detectar grandes imperfecciones en elementos metálicos durante décadas. El uso de esta técnica en la búsqueda de pequeñas fisuras será uno de los problemas a resolver en este proyecto, y mediante éste se obtendrá una conclusión sobre si esta técnica es útil o no en este campo.

Las técnicas END empleadas en la actualidad se esfuerzan para resaltar indicios que puedan representar deficiencias estructurales en una pieza a lo largo de su vida útil. Las técnicas PCRT pueden incrementar el rendimiento de la producción de una pieza, optimizar la vida útil de la misma y prevenir fallos en servicio de forma eficaz.

El sistema PCRT emplea un transductor que excita al componente a través de un rango de frecuencias que abarca desde unos pocos hertzios hasta aproximadamente 5 MHz, dependiendo del tamaño y las propiedades elásticas del material. Otros dos transductores reciben la respuesta modal del componente a la excitación producida. La Figura 2.12 muestra un esquema típico en los sistemas PCRT.

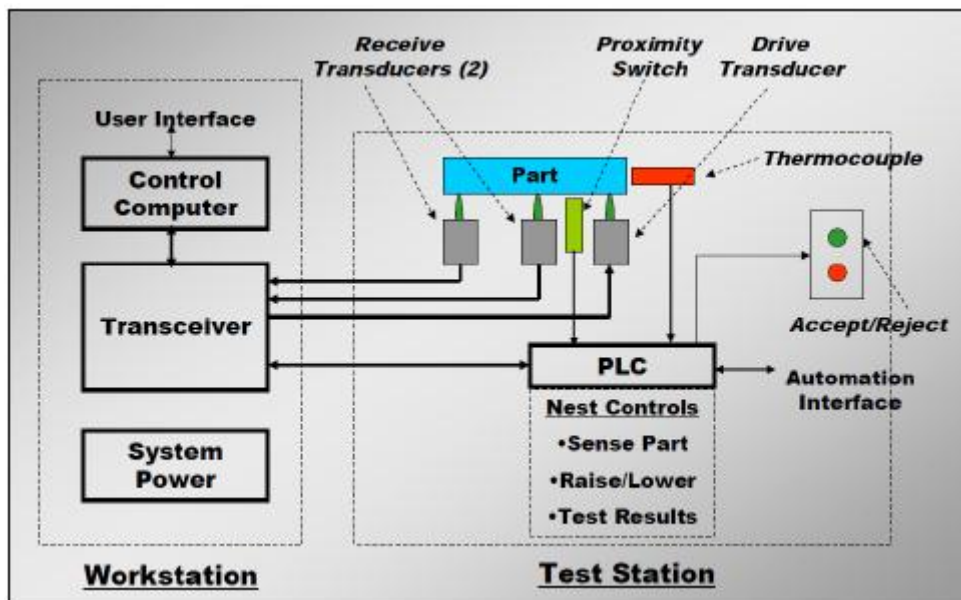


Figura 2.12 Esquema de un sistema PCRT

El proceso de inspección requiere unos segundos para analizar piezas individuales y aproximadamente 3 minutos para conjuntos complejos. El hardware realiza las mediciones de las frecuencias propias, y el software analiza el patrón de resonancia para determinar la integridad estructural de la pieza.

El software está basado en el uso de algoritmos que reconocen patrones y que son capaces de detectar cambios en las frecuencias modales debido a cargas de trabajo, aparición de grietas, pérdida de material u otros defectos.

Es importante señalar que si se detecta la aparición de una grieta, el fallo del componente ya ha comenzado, el material ha sufrido fatiga hasta el punto en el que el inicio de grieta y su propagación han tenido lugar, y el conjunto (tren, en el caso del sector ferroviario) está funcionando con un componente que está fallando, con las fatales consecuencias que puede llegar a suponer.

Por este motivo, el uso de esta técnica puede suponer un gran avance, ya que a diferencia de los demás END, la técnica PCRT sí es capaz de detectar el comienzo del fenómeno de fatiga antes de que aparezca el inicio de grieta. Además evita la participación subjetiva de un técnico, ya que el propio software determina en tiempo real si la pieza estudiada se encuentra en perfecto estado, o si ha sufrido algún problema estructural.

2.4.2 Monitoreo del fenómeno de fatiga mediante sistemas PCRT

A continuación se va a mostrar un caso de estudio, realizado en 2006 por la empresa Vibrant ® y llevado en conjunto con el Centro de Validación de Albuquerque para aluminio 6061 T6. El espectro de las frecuencias fue obtenido entre cada ciclo de carga. En la Figura 2.13 se muestra un extracto de los resultados que se obtuvieron.

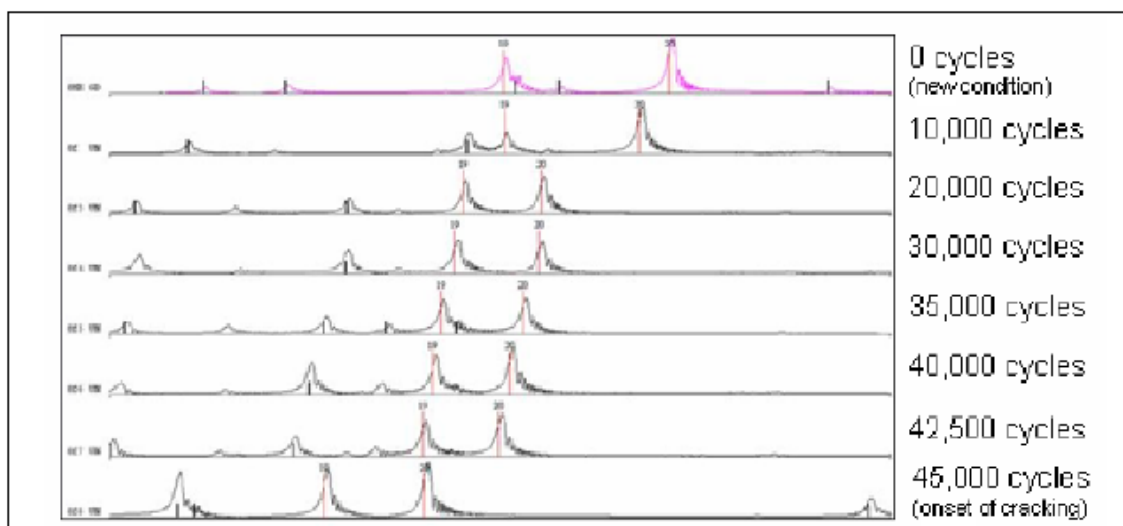


Figura 2.13 Variación de las frecuencias con el aumento del número de ciclos

Los datos muestran cambios de diferentes picos de resonancia con la acumulación de ciclos. El inicio de grieta fue inicialmente detectado por corrientes de Foucault para 45.000 ciclos. Sin embargo parece claro, al ver la figura, el cambio en la frecuencia y con ello en las propiedades elásticas del material. Con esta técnica se podría detectar el fenómeno de fatiga en las primeras etapas del estudio

A su vez, se realizó el seguimiento de la elongación de la pieza, y en la Figura 2.14 está representada la relación existente entre el número de ciclos de carga y el porcentaje de cambio de frecuencia y elongación. Nótese que los cambios en los valores de frecuencia no son proporcionales a la elongación y se puede observar como los cambios de frecuencia no son lineales a lo largo de todo el rango que cubre el estudio.

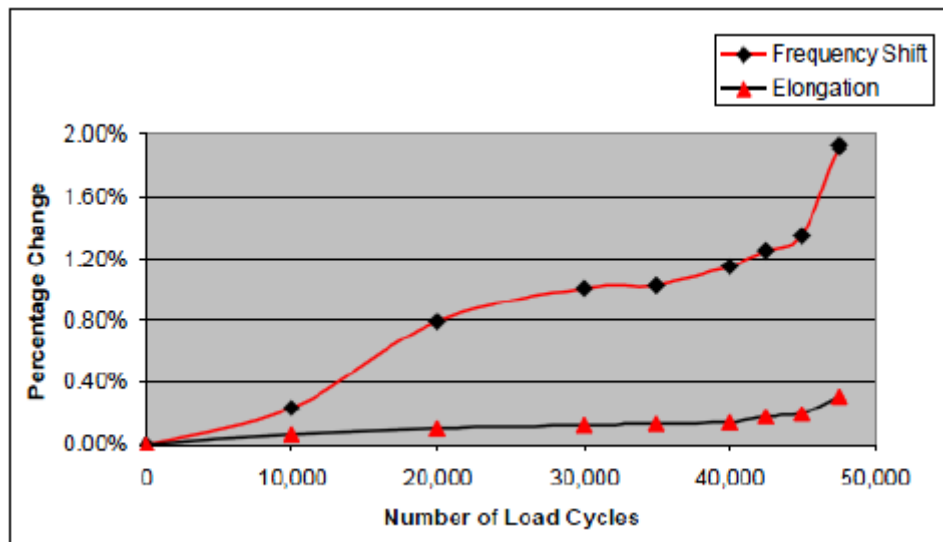


Figura 2.14 Relación entre el número de ciclos y elongación/variación de las frecuencias

La capacidad de los sistemas PCRT para realizar el seguimiento del fenómeno de fatiga fue comprobada también en componentes aeronáuticos. Diferentes piezas fueron sometidas a fatiga y sus frecuencias propias fueron estudiadas y monitorizadas. Estos estudios han demostrado que los sistemas PCRT pueden detectar cambios en el espectro de frecuencias que preceden al inicio de grietas y que los cambios de frecuencia son proporcionales al tamaño de grieta mientras ésta se propaga.

La Figura 2.15 muestra el resultado del estudio del comportamiento modal de un eje ferroviario realizado por la empresa italiana Luchinni centrado en la banda de

frecuencias 8-9.5 KHz, comparando los valores de frecuencias obtenidos para el eje nuevo (en azul) con el eje agrietado (verde). En ella se puede apreciar como las frecuencias del eje fisurado son menores que las frecuencias del eje nuevo.

WIDEM 19/06/2006 D2S-International: Axles Luchinni

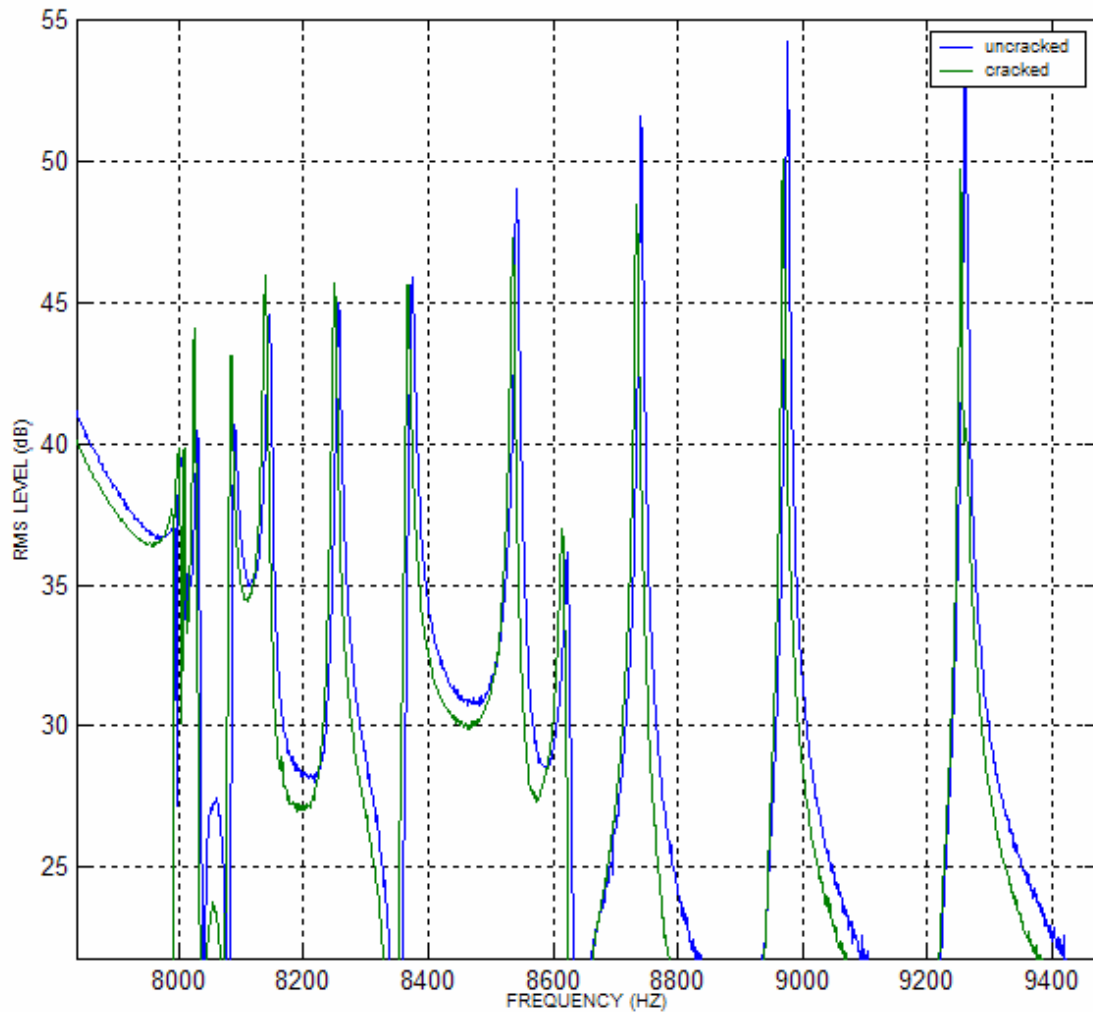


Figura 2.15 Estudio de eje ferroviario para la banda 8-9.5 KHz

Con estos ejemplos queda claro que se han logrado importantes avances en esta técnica, pero que todavía se puede mejorar o se puede extender a otros campos. Este proyecto forma parte de la prolongación de lo ya investigado, ya que se van a comparar diferentes frecuencias de ejes fisurados, pero en este caso, mediante un programa de elementos finitos.

2.5 ESTADO DEL ARTE SOBRE LA APROXIMACIÓN DE UN EJE MEDIANTE SECCIONES

El libro publicado en 2010, *Cracked Rotors* [1], mostró la importancia de las fisuras en ejes, del estudio de su comportamiento estático y dinámico y de su modelado y diagnóstico. Una de las partes de este extenso documento se centra en la aproximación de un eje fisurado mediante secciones.

El documento es en realidad un resumen de más de 20 años de estudios, logros, resultados, desarrollo de modelos y análisis numéricos. Este estudio se centra en aspectos prácticos relativos a la industria maquinaria y al análisis numérico para representar el comportamiento de ejes fisurados.

Se ha demostrado que mediante el método de las secciones se puede simular una fisura en un eje de manera sencilla. El método consiste en sustituir la zona donde se encontraría la fisura por una sección diferente. Esta sección tiene la forma restante de la sección fisurada, como se muestra en la Figura 2.16.

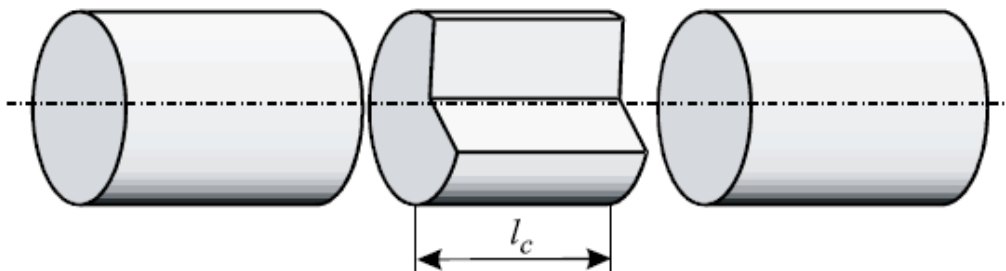


Figura 2.16 Representación de un eje creado mediante secciones. l_c es la longitud de la sección fisurada

La principal condición que debe cumplir el problema es que la sección de la fisura tenga el mismo segundo momento de inercia que la sección del eje real fisurado. El segundo momento de inercia es una propiedad geométrica de una sección transversal que está relacionado con las tensiones y deformaciones máximas que aparecen por la flexión.

Definida ya la sección del elemento, la incógnita del problema es la longitud de dicha sección, l_c , la cual se varía hasta conseguir un elemento equivalente, es decir, resultados equivalentes a los obtenidos con el eje real fisurado.

Primero se comienza con una viga empotrada en uno de sus extremos, esto supone 4 grados de libertad, ya que sólo los desplazamientos horizontales y verticales y los giros respecto a los ejes horizontal y vertical se tienen en cuenta.

Esta viga empotrada se utiliza para definir la flexibilidad y la rigidez de la viga libre. Como se puede ver en la Figura 2.17 el eje se considera empotrado en su extremo A y las cargas externas son aplicadas en el otro extremo B. Con los desplazamientos de acuerdo a los 6 grados de libertad se obtienen las propiedades de la viga libre. El principal objetivo del estudio es el comportamiento a flexión del eje, ya que las vibraciones laterales en general son las únicas vibraciones que son medidas en la industria, aunque también se realiza más adelante el comportamiento a torsión.

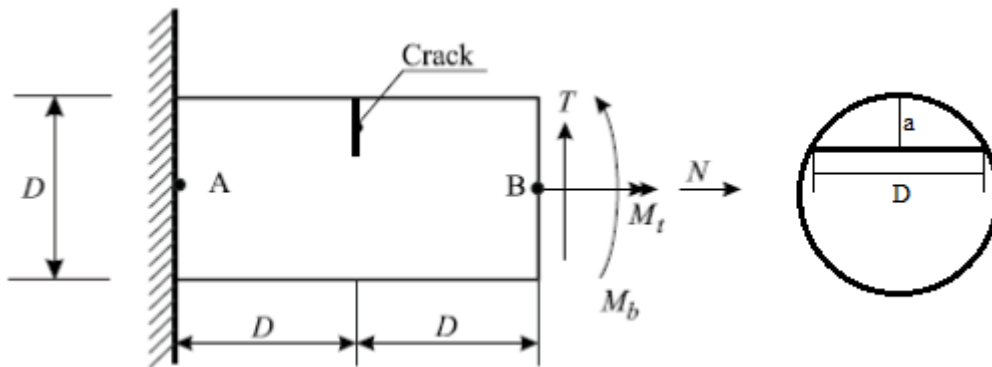


Figura 2.17 Eje empotrado y sección transversal de la fisura

Por último falta definir la longitud de la sección equivalente para la viga libre. De alguna manera la longitud representa la longitud en la cual la influencia de la discontinuidad introducida por la fisura se extiende a lo largo de la viga como lo haría en un eje fisurado, lo cual obviamente depende de la profundidad de la fisura.

En cuanto a los resultados obtenidos se refleja que la profundidad de la fisura y su longitud transversal influyen de manera significativa en los resultados. En la Figura 2.18 se muestran los resultados del análisis a flexión del eje:

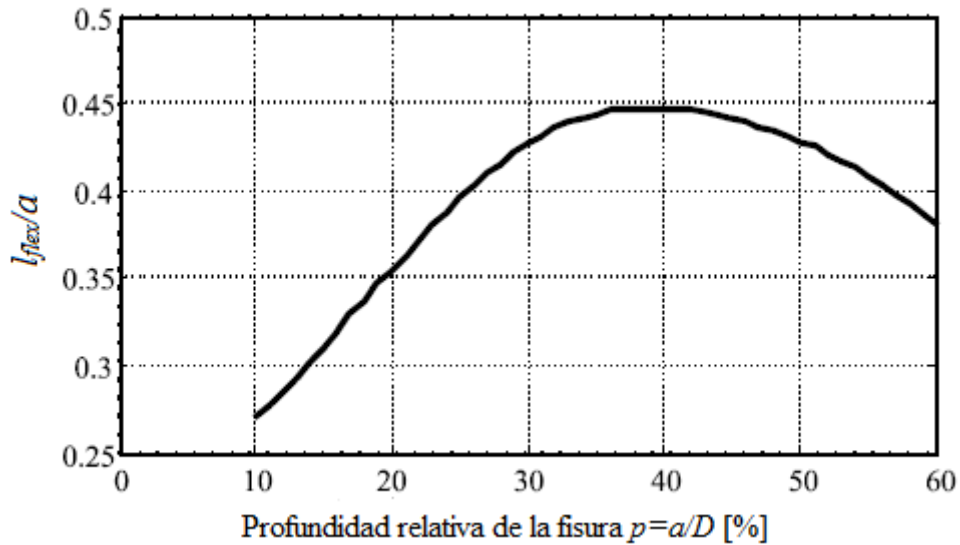


Figura 2.18 Resultados del análisis a flexión

Se muestra la profundidad relativa de la fisura respecto a la longitud de la sección entre la profundidad en un comportamiento a flexión. Se han hecho fisuras desde el 10% del diámetro hasta el 60%. Se muestra una clara progresión continua hasta las fisuras del 35%, a partir de esas dimensiones la longitud vuelve a caer de manera continua. Esto demuestra algo coherente, la longitud aumenta hasta un punto determinado, pero una vez que la fisura es excesivamente profunda basta con poca longitud de sección para lograr la equivalencia respecto al eje fisurado.

En la Figura 2.19 se muestran los resultados obtenidos en el análisis a torsión:

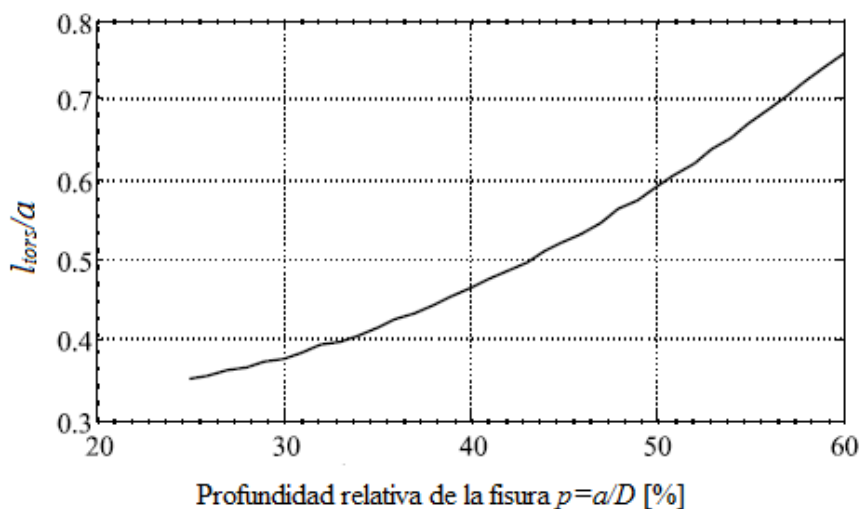


Figura 2.19 Resultados del análisis a torsión

La gráfica muestra los mismos parámetros que el resultado a flexión, pero se puede observar algo interesante, ya que aquí la profundidad relativa no influye de la manera que lo hacía en el análisis anterior. En este caso los resultados crecen de una manera casi lineal, por lo tanto, a mayor profundidad de fisura, siempre es necesario una mayor longitud para alcanzar la equivalencia.

CAPÍTULO 3

PLANTEAMIENTO DE LOS PROBLEMAS

3.1 MÉTODO DE RESOLUCIÓN

3.1.1 El método de los elementos finitos

El Método de los Elementos Finitos (MEF) es una de las herramientas más potentes usadas en la actualidad para la resolución numérica de un gran número de problemas de ingeniería. Este método es aplicable en una gran variedad de problemas, como pueden ser análisis estructurales, comportamiento mecánico de automóviles, problemas de transferencia de calor, electromagnéticos, etc.

Mediante el MEF se realiza una aproximación para obtener la solución de problemas continuos, basada en transformar un cuerpo de naturaleza continua en un modelo discreto aproximado. A esta transformación se le denomina discretización del modelo.

El continuo se divide en un número finito de partes denominados elementos. Las propiedades del material y sus ecuaciones constitutivas son consideradas sobre dichos elementos, los cuales poseen unos puntos característicos denominados nodos. Estos nodos son los puntos de unión de cada elemento con sus adyacentes.

El comportamiento en el interior de cada elemento queda definido a partir del comportamiento de los nodos mediante las “funciones de interpolación” o “funciones de forma”. Estas funciones definen de manera única el campo de desplazamientos dentro de cada elemento finito, expresado en términos de los desplazamientos nodales de dicho elemento. Es por tanto, una aproximación de los valores de una función a partir del conocimiento de un número determinado y finito de puntos. Si bien las verdaderas funciones de forma son desconocidas, se puede usar la hipótesis de que su expresión aproximada puede ser obtenida en forma polinómica.

La relación entre estos elementos, considerando debidamente las condiciones de contorno (cargas y restricciones), da lugar a un sistema de ecuaciones cuya solución va a permitir obtener resultados mediante los cuales se va a conocer el comportamiento aproximado del modelo continuo.

El MEF puede dividirse en tres etapas:

- Preproceso. Preparación del modelo para el cálculo. En esta etapa se realizan las operaciones de:
 - Dibujo de la geometría del modelo.

- Selección de las propiedades de los materiales.
 - Aplicación de cargas exteriores y condiciones de contorno.
 - Discretización del modelo en elementos finitos.
- Resolución. Etapa en la que se realizan todos los cálculos y se generan las soluciones. En ella se realizan las operaciones de:
 - Selección del tipo de cálculo a realizar.
 - Configuración de los parámetros de cálculo, intervalos de tiempo y número de iteraciones.
 - Transferencia de las cargas al modelo, generación de funciones de forma, ensamblaje de la matriz de rigidez, resolución de sistemas de ecuaciones y obtención de la solución.
- Postproceso. En esta etapa se realizará la representación gráfica de los resultados, así como la obtención de resultados indirectos operando las soluciones del modelo.

3.1.2 Introducción al programa Abaqus 6.10-1

Abaqus es un código de análisis por el Método de los Elementos Finitos de propósito general, orientado a la resolución de problemas no lineales. Fue desarrollado hace más de 20 años por la empresa Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc. (HKS), y en la actualidad se utiliza para resolver grandes y complejos problemas de ingeniería.

Abaqus puede ser utilizado para resolver problemas de resistencia de materiales, mecánica de fractura, vibraciones, ingeniería forense, procesos de conformado de metales, transferencia de calor, etc.

Abaqus está estructurado en tres grandes bloques, en correspondencia con las tres etapas en que se divide un problema para ser analizado por el Método de Elementos Finitos (preproceso, resolución y postproceso).

Abaqus se encuentra dividido en cuatro módulos:

- Abaqus/Standard, para resolución de problemas de propósito general. Incluye todas las posibilidades de análisis excepto el análisis dinámico.

- Abaqus/Explicit, para resolución de problemas de tipo dinámico. Es poderoso por su eficiencia computacional en grandes modelos, y también altamente efectivo para aplicaciones cuasi-estáticas.
- Abaqus/CAE, módulo interactivo para la creación de modelos de elementos finitos. A través de este módulo se puede implementar un modelo de forma sencilla y rápida.
- Abaqus/Viewer, módulo de visualización de soluciones. Muestra los resultados obtenidos una vez resuelto el problema.

Para resolver un problema mediante Abaqus se deben introducir los datos de entrada que necesita el programa. Esta etapa se corresponde con la etapa de preproceso del Método de los Elementos Finitos.

Los datos de entrada se introducen en el programa a través de un archivo de texto (*input file*) que contiene toda la información necesaria para realizar la simulación. Este archivo de texto, también denominado “archivo de entrada”, se puede crear de forma interactiva utilizando Abaqus/CAE, que genera internamente el archivo de texto, o mediante un editor de texto, donde el archivo es escrito directamente por el usuario.

Los datos que se introducen en el archivo de entrada son de dos tipos, *model data* y *history data*.

Los *model data* que se utilizan para definir el modelo de elementos finitos son:

- Geometría. La geometría es lo primero que se introduce y debe representar lo más fielmente posible el cuerpo real que se va a estudiar. Abaqus permite realizar modelos de geometría muy compleja, gracias al módulo Abaqus/CAE. La geometría, así como el mallado de un modelo, se define mediante los elementos y sus nodos.
- Material. El modelo que se va a implementar puede estar formado por varios materiales. Se deben definir las propiedades de los distintos materiales de los que está formado el modelo, y se deben asociar a las partes de la geometría a las que correspondan.
- Partes y ensamblaje. La geometría del modelo se puede definir organizándola en partes, por lo tanto, hay que introducir en el archivo de entrada la relación que existe

entre esas partes, además de la posición relativa de unas respecto de las otras. Esto se lleva a cabo a través de un procedimiento conocido como ensamblaje.

- Condiciones iniciales. Se deben especificar las condiciones iniciales del modelo. En ocasiones, es necesario especificar condiciones iniciales distintas de cero para tensiones, temperaturas, velocidades, etc.
- Condiciones de contorno. El modelo puede estar sometido a ciertas imposiciones por parte de su entorno que deben ser especificadas en el archivo de entrada. Se pueden imponer restricciones del movimiento, valores de desplazamientos y rotaciones o condiciones de simetría.
- Interacciones. En ocasiones el modelo que se desea estudiar puede estar formado por varios cuerpos que en un momento dado sufren una interacción o un contacto. Abaqus permite también realizar modelos ante este tipo de situaciones.
- Definiciones de amplitud. Ciertos estados de carga y condiciones de contorno pueden estar definidos en función del tiempo, por lo tanto se deben introducir los parámetros de las curvas que definen esos estados de cargas y condiciones de contorno.
- Propiedades del entorno. Se pueden definir las características del entorno, como puede ser la humedad, temperatura, presión, etc.
- Continuación de análisis. Consiste en introducir resultados de análisis previos para continuar buscando resultados con el nuevo modelo.

Después de introducir el archivo de entrada en el programa, se procede a la resolución del modelo. Esta fase es interna y en ella Abaqus no interacciona con el usuario. Una vez que el programa ha resuelto el modelo, los resultados de la simulación se ven a través del módulo de visualización, el cual, lee el archivo de datos de salida (*output file*), y es capaz de crear animaciones de la simulación, gráfico, tablas de resultados, etc. La visualización de los resultados se corresponde con la etapa de postproceso del Método de Elementos Finitos.

3.2 DESCRIPCIÓN DE LOS PROBLEMAS

3.2.1 Análisis modal del eje fisurado

Los distintos análisis modales que se van a realizar se deben al desarrollo de las nuevas técnicas PCRT que detectan la aparición del fenómeno de la fatiga antes de que aparezcan las grietas. Dado que los ejes ferroviarios, al estar sometidos a carga y girar, están sometidos a cargas cíclicas, las cuales pueden provocar la aparición de grietas por fatiga.

Por lo tanto en el análisis modal se va a estudiar una simplificación del eje empotrado, variando tanto los tamaños de las fisuras como su posición en el eje. Con esto se pretende comprobar si las frecuencias naturales de cada modo de vibración varían al aparecer fisuras en su superficie.

En este proyecto se tendrán en cuenta distintos tipos de modos de vibración, para comprobar si la frecuencia natural del eje varía en mayor o menor cantidad con algún modo en especial. Esto es importante, ya que dependiendo de la forma de la fisura puede que ésta sea detectada mejor por un modo que por otro.

En el presente capítulo se describirá el eje sometido a estudio, se planteará la metodología seguida para el desarrollo del trabajo y se detallarán las simplificaciones que se han realizado.

3.2.2 Eje equivalente unidimensional

En cuanto a la aproximación mediante secciones, se pretende lograr un eje dividido en secciones equivalente a una simplificación de un eje real con fisuras. La zona en la que debería estar la fisura se sustituirá por una sección equivalente, cuya longitud se variará hasta lograr la mayor equivalencia posible. Este problema es una variante del estudio que ya se ha mostrado en el Capítulo 2 [1].

Con esto se pretende conseguir una simplificación de los análisis modales. Esto se debe a que al tratarse de un elemento unidimensional está formado por elementos en línea, los cuales cuentan cada uno con dos nodos. En cambio el eje en 3D está formado por

celdas hexaédricas en su mayoría, las cuales cuentan con 8 nodos, lo cual aumenta de manera considerable el tiempo de análisis.

El objetivo es conseguir un eje lo más parecido posible al eje en tres dimensiones. Para lograrlo se variará la longitud de la sección que contiene la fisura, hasta conseguir las frecuencias más parecidas a la frecuencia de referencia. Para cada fisura se tiene una frecuencia de referencia, la cual ha sido calculada en el primer problema. Se realizarán varios análisis con distintas longitudes cada vez más pequeñas, hasta que los resultados converjan, entonces ese será el valor útil, cuya frecuencia debe ser lo más parecida a la de referencia.

3.3 CARACTERÍSTICAS DEL EJE

A continuación se muestra el eje ferroviario y el material que lo constituye.

- Geometría del eje

Los datos pertenecientes a la geometría del eje se han obtenido de un plano de diseño facilitado por CAF (Construcciones y Auxiliar de Ferrocarriles), con el que se han realizado diversos estudios en el departamento de ingeniería mecánica de la Universidad Carlos III de Madrid. El plano completo puede observarse en el último capítulo del documento, en el Anexo B.

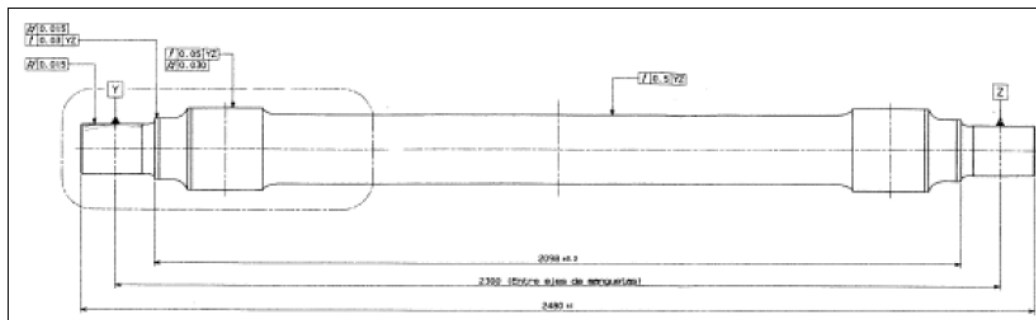


Figura 3.1 Boceto del eje sometido a estudio

- Definición del material

El material empleado en este estudio es acero al carbono templado A1N, ampliamente extendido en la fabricación de ejes ferroviarios, según la norma UNE-EN 13261 de diciembre de 2009 [11], cuyas propiedades se detallan a continuación:

- Densidad = 7850 kg/m^3
- Resistencia ultima a tracción = 600 MPa
- Limite elástico = 395 MPa
- Modulo de Young = 210 GPa

3.4 SIMPLIFICACIONES REALIZADAS

Se van a tener en cuenta varias simplificaciones, para así disminuir la dificultad del problema. Estas simplificaciones son:

- Tan solo se va a analizar la parte central del eje, como se muestra en la Figura 3.2. Esto se ha creído conveniente ya que se disminuye de manera considerable la dificultad del modelado y del mallado. Pero sobre todo se va a llevar a cabo esta simplificación ya que la parte central es la más crítica en la aparición de fisuras y fatiga, debido a que el momento flector es máximo y hay más probabilidad de que el balasto golpee esta zona.

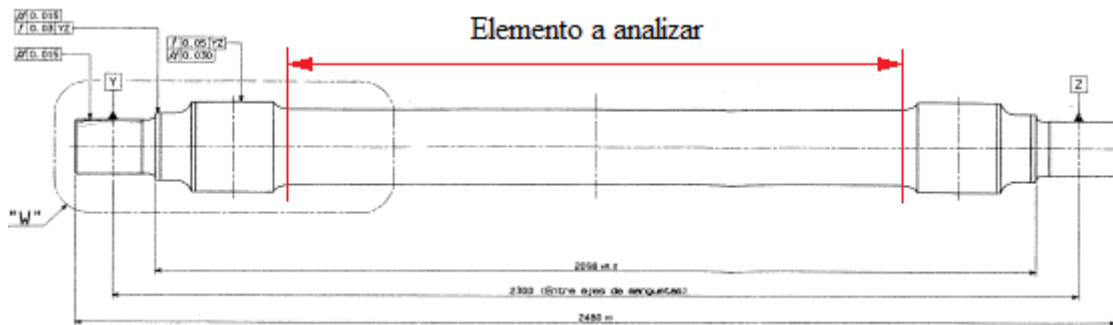


Figura 3.2 Representación de la zona a analizar

Como se puede observar, el elemento de estudio será un cilindro sin radios de acuerdo. El estudio del eje completo sin simplificaciones se propone como trabajos futuros.

Realizando esta simplificación se obtiene un cilindro con una longitud de 1454 mm y un diámetro de 180 mm como el que se muestra en la Figura 3.3.



Figura 3.3 Eje definitivo del estudio

- El eje a estudiar no estará sometido a ningún esfuerzo externo, es decir, se encontrará en vibración libre sin ninguna fuerza que actúe sobre él.
- Se estudiará únicamente el análisis modal del eje simplificado, no del wheelset completo, estudio que se considera de interés y por lo tanto también se propone como trabajo futuro.

3.5 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DEL MALLADO

Sin duda el mallado es una de las partes más importantes del análisis, ya que él será el que proporcione unos resultados más o menos precisos, por esta razón en cualquier análisis mediante MEF se hace necesario el realizar este análisis de sensibilidad.

El procedimiento a seguir para analizar la sensibilidad de mallado consistirá en ir disminuyendo el tamaño de los elementos hasta que el resultado final converja a un valor prácticamente fijo. El tipo de mallado a utilizar en todos los análisis va a ser uno similar al utilizado en el artículo sobre la aproximación mediante secciones [1]. Este mallado se adapta perfectamente a la geometría del cilindro como se puede observar en la Figura 3.4.

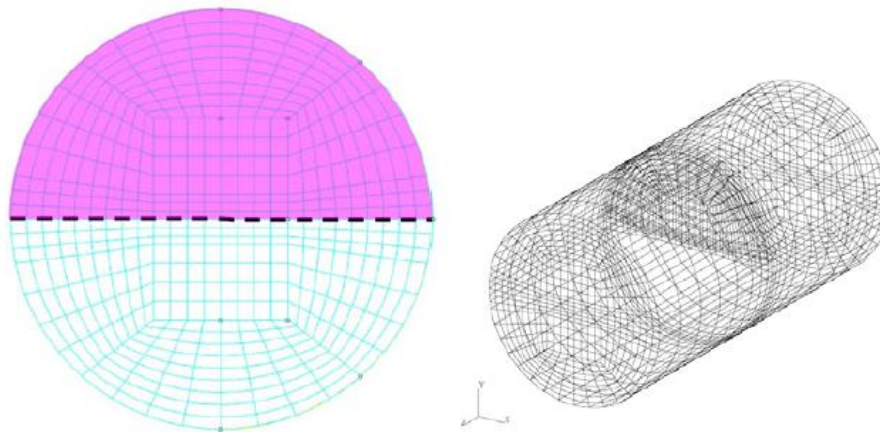


Figura 3.4 Mallado empleado en el artículo sobre aproximación mediante secciones

Como se puede observar el mallado consiste en un cuadrado en el centro de la sección, el cual puede ser mallado con elementos hexaédricos cuadrados sin dificultad. En este proyecto se va a mallar con la misma idea, aunque no se logre una malla tan bien estructurada.

Se van a realizar 6 mallados con elementos hexaédricos, disminuyendo como ya se ha comentado el tamaño de los elementos. También se va a variar el control de curvatura, por el cual Abaqus es capaz de mallar con más elementos las zonas curvas. Estos serán los 7 mallados que se van a crear:

Tabla 4. Propiedades de los mallados empleados en el análisis de sensibilidad

Mallado	Tamaño aprox. de cada elemento (m)	Control de curvatura ($0,0 < h/L < 1,0$)	Nº de elementos
1	0,05	0,5	783
2	0,04	0,4	1656
3	0,03	0,3	2736
4	0,02	0,2	7081
5	0,015	0,1	18236
6	0,01	0,1	49348
7	0,01	0,015	52852

Se han analizado los primeros modos de vibración del eje, teniendo en cuenta la distinción entre flectores, torsores y longitudinales. En las Figuras 3.5, 3.6 y 3.7 se muestran las frecuencias obtenidas para cada mallado.

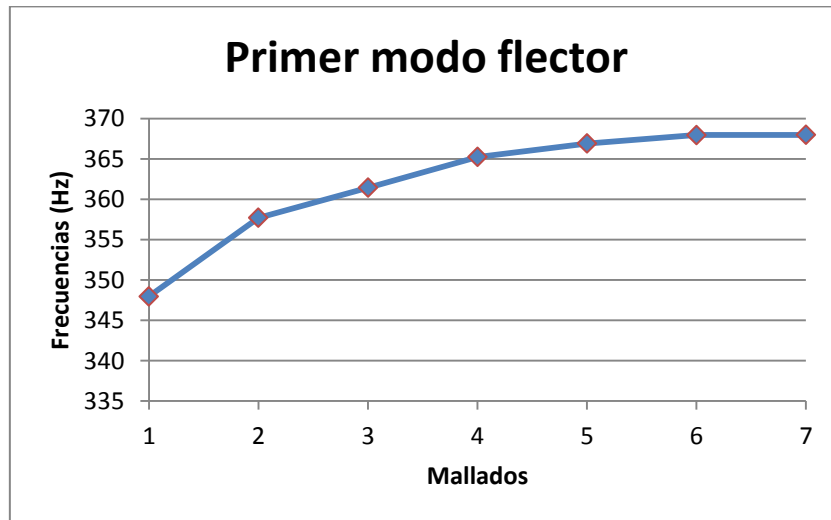


Figura 3.5 Análisis de sensibilidad en el primer modo flector

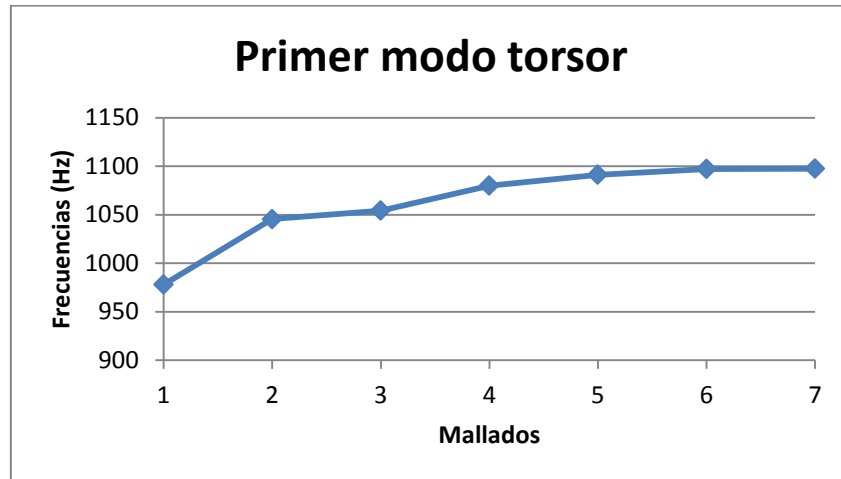


Figura 3.6 Análisis de sensibilidad en el primer modo torsor

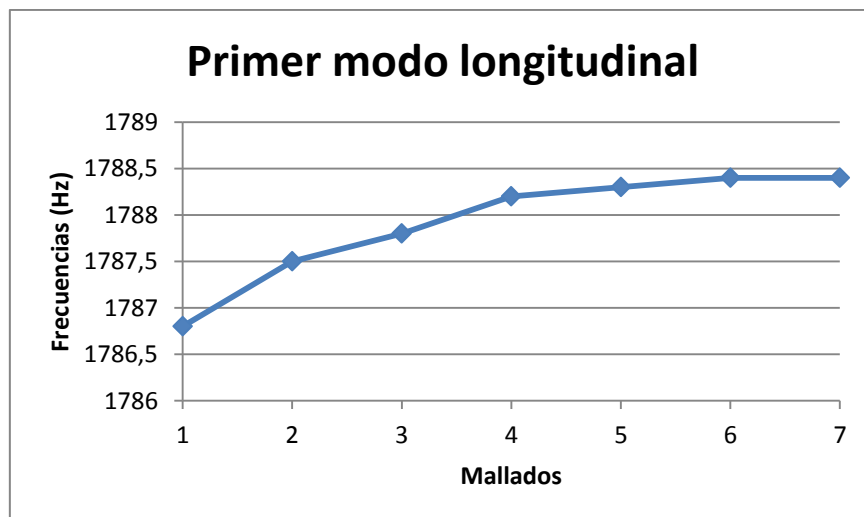


Figura 3.7 Análisis de sensibilidad en el primer modo longitudinal

En la Tabla 5 se muestra la variación que sufren las frecuencias a medida que se disminuye el tamaño de los elementos. Esta variación se ha realizado para el primer modo torsor, ya que es el que más ha variado al disminuir el tamaño de la malla.

Tabla 5. Variaciones porcentuales entre los distintos mallados

Variación entre el mallado:	Variación de las frecuencias (%)
1 y 2	6,906
2 y 3	0,822
3 y 4	2,447
4 y 5	1,046
5 y 6	0,540
6 y 7	0,027

Como se puede observar, con el mallado número 6 la variación ya es mínima. Normalmente se acepta una variación menor del 1 %, como vemos en la Tabla 5 ésta se alcanza con el mallado número 6. Por lo tanto dicho mallado se va a utilizar para todos los análisis, ya que aporta un resultado muy fiable y su tiempo de procesamiento no es tan prolongado como el correspondiente al mallado 7.

Resulta interesante observar cómo en el modo longitudinal la frecuencia convergió ya en el modo número 3, mientras a los otros dos modos de vibración les resultó más complicado.

En la Tabla 6 se recuerdan los valores del mallado que se va a utilizar en el resto de los análisis.

Tabla 6. Propiedades del mallado definitivo

Mallado elegido	Tamaño aprox. de cada elemento (m)	Control de curvatura ($0,0 < h/L < 1,0$)
Número 6	0,01	0,1

Cabe destacar que el análisis de sensibilidad se ha realizado para el eje en 3D, ya que el eje unidimensional no presenta ninguna dificultad a la hora de ser mallado. Para el segundo problema basta con cubrir toda la línea de nodos.

Para el eje unidimensional se ha realizado un mallado con un tamaño aproximado de cada elemento de 0,5 mm. Como se observa el tamaño es mucho menor, pero al ser un elemento unidimensional el número de elementos es de unos 2908, simplificando de manera considerable el análisis.

3.6 METODOLOGÍA DE ESTUDIO DEL PRIMER PROBLEMA

Una vez definidos los problemas a desarrollar, el eje ferroviario y su material, se va a describir la forma en la que se van a abordar dichos problemas.

3.6.1 Modelado del eje ferroviario

Ya que el eje a ensayar va a ser una simplificación del eje real su modelado se va a realizar mediante el programa con el que se desarrollarán los análisis. El programa Abaqus/CAE probablemente sea menos intuitivo que otros programas como Solid Edge o Pro/ENGINEER a la hora de modelar geometrías complejas, pero no es el caso de este proyecto.

En caso de que hubiera que modelar el eje tal y como aparece en el plano adjunto se recurriría a otros programas como los ya nombrados y más tarde se importaría la geometría a la herramienta Abaqus/CAE.

3.6.2 Condiciones de contorno

El eje sometido a estudio estará completamente empotrado en sus extremos. Como propuesta de futuros trabajos se propone la variación de dichas condiciones de contorno, para así acercarse más a las condiciones reales en las que se podría analizar el eje en busca de fallos de fatiga o grietas en la superficie.

3.6.3 Análisis modal

Una vez se haya realizado el modelado del eje y aplicado las condiciones de contorno se procederá a realizar los análisis modales. En cuanto al número de modos de vibración a analizar hay que tener en cuenta la distinción de los 3 principales modos de vibración: longitudinales, torsores y flectores. Para realizar un correcto análisis modal se deben estudiar los suficientes modos que abarquen los tres tipos distintos. En el siguiente punto se obtiene el número de modos que se van a analizar.

3.6.4 Número de modos de vibración

Como ya se ha explicado, en un análisis modal de este tipo es necesario abarcar suficientes modos de vibración de los tres tipos distintos, para así llegar a resultados correctos. Para calcular este valor se van a observar los primeros modos de vibración del eje. El objetivo es reunir suficientes modos de cada tipo para así poder obtener resultados útiles.

Los modos torsionales y longitudinales son menos abundantes en este ensayo, por lo tanto se han conseguido menos modos útiles. En la Tabla 7 se muestran los modos que se analizarán, en total 23.

Tabla 7. Modos a analizar

Modos flectores	Modos torsores	Modos longitudinales
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	
7		
8		
9		
10		
11		
12		

En las Figuras 3.8, 3.9 y 3.10 se muestran todos los modos distinguiendo entre flectores, torsores y longitudinales.

Modos flectores

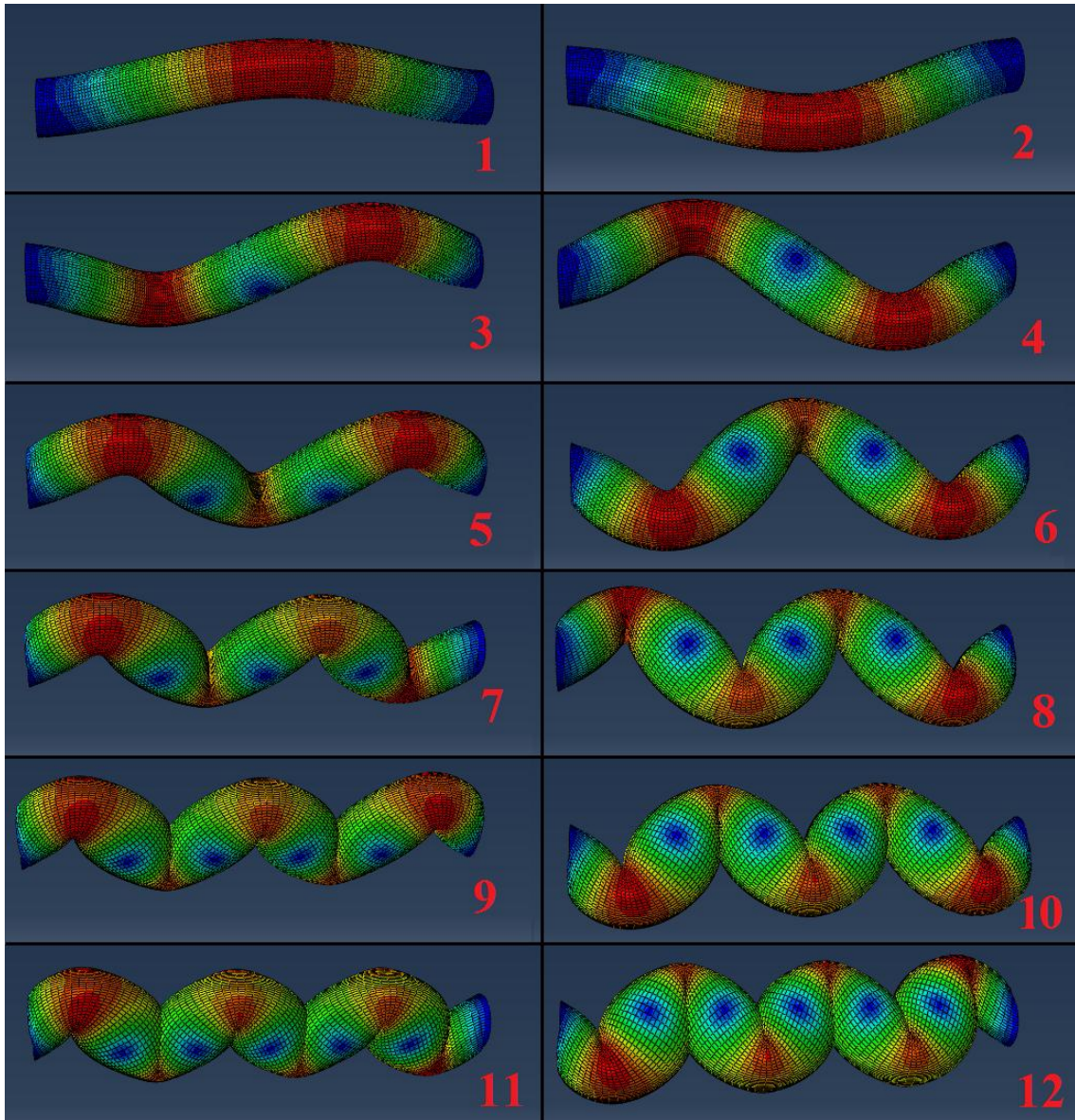


Figura 3.8 Modos flectores a analizar

Modos torsores

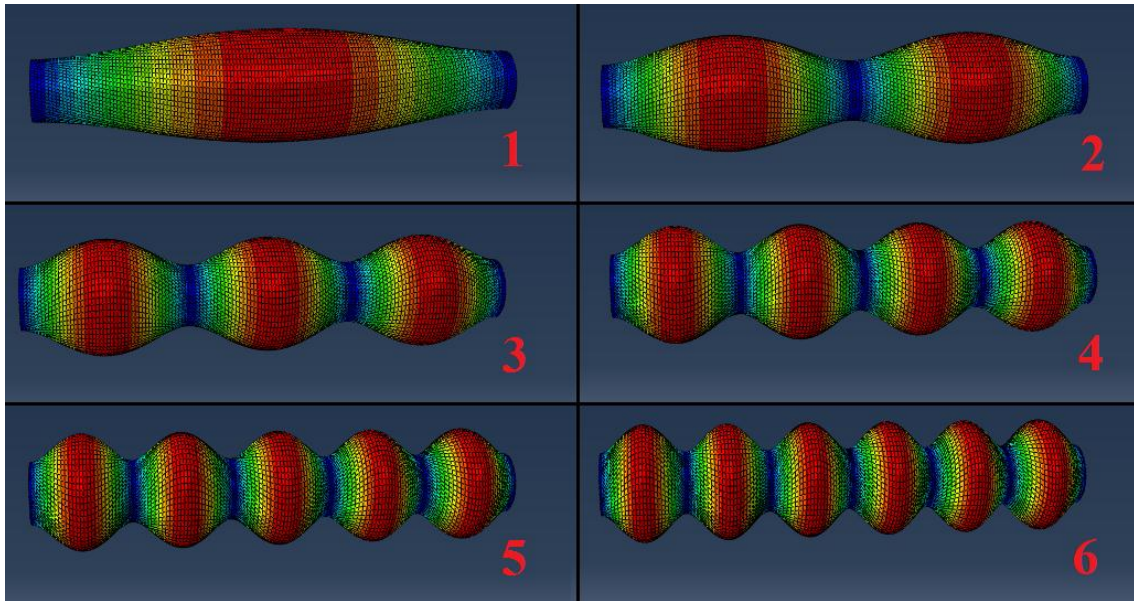


Figura 3.9 Modos torsores a analizar

Modos longitudinales

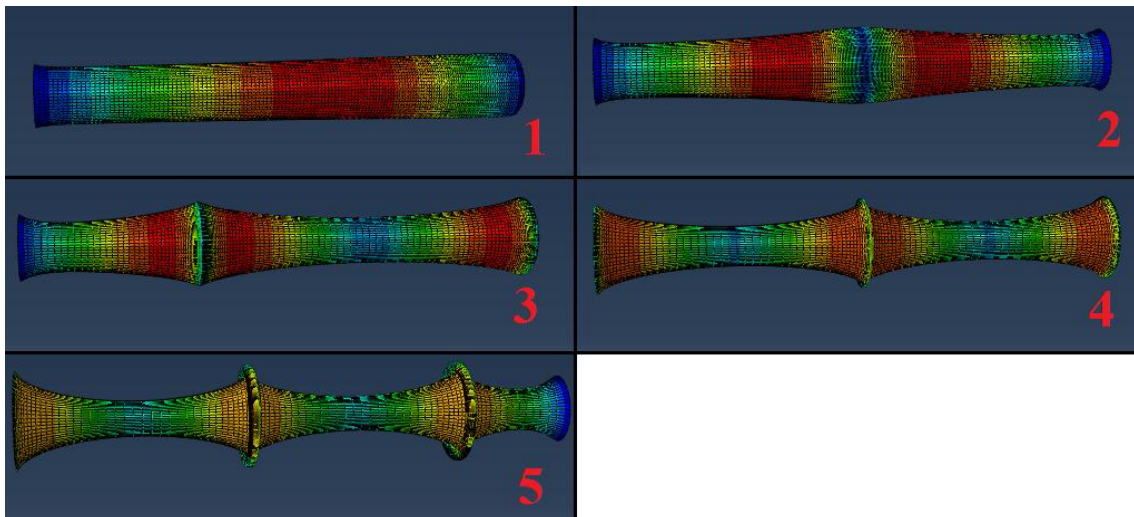


Figura 3.10 Modos longitudinales a analizar

3.6.5 Modelado de grietas

Uno de los objetivos de este proyecto es analizar la influencia de la existencia de grietas en el comportamiento modal del eje ferroviario. La aparición de una grieta en un elemento, generalmente reduce la rigidez del mismo, alterando las frecuencias propias de la pieza sometida a estudio.

Para este estudio se van a introducir diferentes grietas planas en dos zonas distintas del eje. Un trabajo interesante que se propone como futuro estudio es la realización de otros tipos de grietas, como de frente circular o elíptico. A continuación se detallan las dos zonas a estudiar:

- Una zona será la sección central, ya que es en la que aparece el mayor momento flector cuando el eje se encuentra en funcionamiento. Por este motivo en esta zona es donde pueden aparecer mayores tensiones, las cuales pueden provocar una catástrofe en caso de que exista una fisura.
- La segunda zona a analizar será una zona cercana a los extremos, exactamente a 10 mm del borde del eje, ya que cerca se encuentra el cambio de sección, zona que actúa como un concentrador de tensiones.

En estas zonas se van a generar diferentes tipos de grieta variando la profundidad de éstas. Se crearán 5 tipos distintos de grietas, cuyos parámetros característicos y esquema aparecen en la Figura 3.11. Las propiedades de las fisuras se muestran en la Tabla 8.

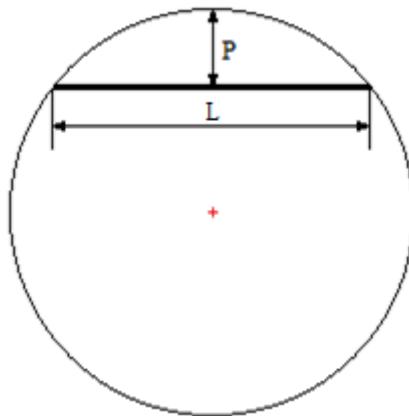


Figura 3.11 Parámetros de las fisuras

Tabla 8. Profundidades y longitudes de las grietas

Nº de grieta	% del radio	Profundidad, P (mm)	Longitud, L (mm)
20	20	18	108
40	40	36	144
60	60	54	165
80	80	72	176
100	100	90	180

Para facilitar el estudio y la visualización de resultados, las fisuras de la zona central se nombrarán por la letra A, y las de la zona exterior con la letra B, seguidas del porcentaje de radio que ocupen: A20, B20, A40, B40, A60, etc.

Por lo tanto en el estudio se analizarán en total 10 fisuras, 5 en la zona A, y 5 en la zona B.

3.7 METODOLOGÍA DE ESTUDIO DEL SEGUNDO PROBLEMA

Como ya se ha explicado anteriormente, el segundo problema también consiste en el análisis modal de una simplificación de un eje fisurado. La diferencia es que este eje está modelado con elementos unidimensionales, mientras que el anterior lo estaba con elementos tridimensionales. En el presente apartado se va a explicar detalladamente la metodología a seguir en este problema, aunque muchos apartados son similares a los del primer problema ya nombrado.

3.7.1 Modelado del eje ferroviario

En este caso el diseño del eje no tiene nada que ver con el llevado a cabo en el primer problema, ya que se trata de un elemento unidimensional. El diseño del eje se realizará a través de una de las múltiples herramientas de generación de piezas de Abaqus/CAE. El programa nos permite generar un alambre en una dimensión, y más tarde asignarle una o varias secciones a dicho alambre.

Por lo tanto para cada análisis se generará un alambre de 1,454 m de longitud, como el eje de estudio. Debido a que se realizan estudios de dos posiciones distintas de fisuras, habrá dos modelos distintos:

- Eje con fisura tipo A. Puesto que la fisura tipo A se encuentra en la zona central del eje, en este caso esa misma zona se sustituirá por una sección con el perfil de la fisura que se desee analizar, mientras que el resto del eje permanecerá con el perfil habitual, una circunferencia de 180 mm de diámetro.
- Eje con fisura tipo B. Al contrario que las de tipo A, estas fisuras se encuentran a 10 mm del extremo del eje. Por lo tanto en este caso, la sección fisurada se encontrará a 10 mm del borde, mientras que el resto del eje contendrá la sección circular habitual.

3.7.2 Condiciones de contorno

Al igual que en el primer problema, este eje también se encontrará empotrado en sus extremos, por lo tanto sus bordes no sufrirán ningún tipo de desplazamiento angular

ni lineal. Se propone como trabajos futuros la realización de estos análisis en otras condiciones, para así aproximarse más a las condiciones reales de análisis en busca de fisuras.

3.7.3 Análisis modal

Una vez se haya diseñado el eje unidimensional y aplicado las condiciones de contorno se procederá a realizar los análisis modales. Al igual que en el primer problema se va a analizar el eje teniendo en cuenta la distinción entre modos flectores, modos torsores y modos longitudinales. En cuanto al número de modos de vibración a analizar será el mismo que en el primer problema, ya que estudiando esos mismos modos se obtienen suficientes resultados para llegar a unas conclusiones precisas. Los modos que se van a analizar se muestran en el Apartado 3.6: *Metodología de estudio del primer problema* en la Tabla 7.

3.7.4 Modelado y longitud de las grietas

Las grietas que se van a realizar en el segundo problema serán las mismas que las generadas en el anterior. Las propiedades geométricas (profundidad y longitud) de dichas grietas se muestran en el Apartado 3.6, en la Figura 3.11 y en la Tabla 8. En cuanto a cómo se calculan las propiedades de cada fisura (momentos de inercia, módulo de torsión, centro de gravedad, etc.), viene reflejado en el Capítulo 5.

La diferencia a la hora de generar las grietas surge en el momento de elegir la longitud de la sección fisurada. En el primer problema las grietas no tienen longitud, o su longitud es nula, debido a que son particiones transversales generadas en el eje. En el segundo problema, debido a que se genera un alambre con diferentes secciones, se puede precisar la longitud de la sección de la grieta.

Ya que uno de los objetivos de este problema es estudiar si la frecuencia llega a converger al variar la longitud de la sección de la fisura, se ha decidido estudiar las siguientes longitudes: 0,2 mm; 0,4 mm; 0,6 mm; 0,8 mm; 1 mm; 1,2 mm; 1,4 mm; 1,6 mm; 1,8 mm; 2 mm; 4 mm; 8 mm y 16 mm.

Por lo tanto para cada fisura se realizarán 13 análisis, uno para cada longitud de fisura.

Al igual que en el primer problema, las fisuras se nombrarán en función de su zona de aparición (A o B) seguido del porcentaje de profundidad de radio que ocupan.

CAPÍTULO 4

DESARROLLO DEL PRIMER PROBLEMA Y RESULTADOS

4.1 DESARROLLO DEL PROBLEMA MEDIANTE ABAQUS

En el capítulo anterior se ha descrito la metodología que se va a llevar a cabo a la hora de realizar los análisis, mientras que en el presente apartado se van a explicar de manera resumida los pasos a seguir para crear uno de los estudios.

4.1.2 Modelado del eje

El modelado del eje se realiza en el módulo *Part* del programa. Debido a la forma del eje simplificado, una de los métodos para conseguir esta geometría es la extrusión, la cual consiste en dibujar la sección del cilindro y posteriormente darle la profundidad deseada.

Como ya se ha explicado la sección del cilindro es un círculo de diámetro 0,18 m, y su profundidad es de 1,454 m. Estos valores se introducen en la opción de extrusión y así obtenemos nuestro eje simplificado, el cual se muestra en la Figura 4.1.

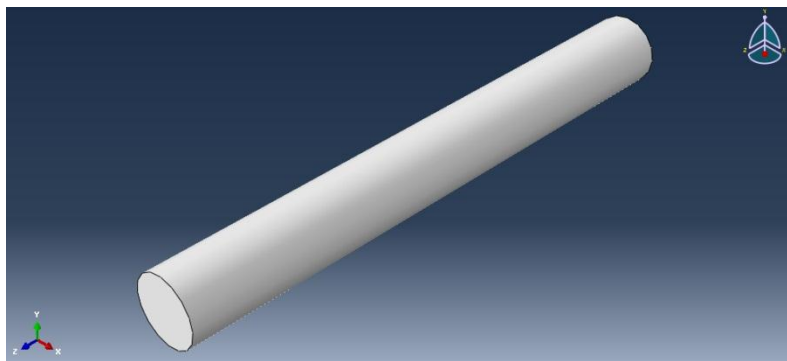


Figura 4.1 Eje diseñado mediante Abaqus/CAE

Hay que tener especial cuidado en este apartado, ya que como es sabido Abaqus no utiliza unidades, por lo tanto si se desea que exprese el resultado en el sistema internacional, se deben introducir todos los valores en dicho sistema: metros, pascales, kg/m^3 , etc.

4.1.3 Asignación de propiedades

Las propiedades se asignan al elemento a través del modulo *Property*, en el cual se introducen los valores mostrados en el Capítulo 3. Se debe introducir la densidad, y en cuanto a las propiedades elásticas se introducen en el programa el Módulo de Young y el coeficiente de Poisson. El primero ya es conocido, y en cuanto al coeficiente se ha elegido un valor habitual de 0,3.

Una vez creado el material, se crea una sección la cual contendrá el cilindro completo y se asigna el material a la sección creada.

Un detalle importante a la hora de crear análisis en Abaqus es si un elemento es dependiente o independiente. En este caso, solo tenemos una sección, compuesta por un cilindro sencillo, por lo tanto lo más sencillo es elegir la opción independiente. Al elegir esta opción a la hora de realizar el mallado éste se hace sobre todo el elemento en conjunto.

Si el análisis constara de un objeto formado por varias partes lo correcto sería hacer al elemento dependiente y así realizar el mallado distinguiendo entre las diferentes partes.

4.1.4 Creación del análisis

En la creación del análisis, o del *Step*, lo primero que da a elegir el programa es el tipo de estudio que se desea realizar. En nuestro caso es un análisis de perturbación lineal, y dentro de éste se elige la opción de análisis de frecuencia.

En cuanto al modo de solucionar el problema nos ofrece tres posibilidades: Lanczos, Automatic Multi-level Substructuring (AMS) o Subspace iteration. Los resultados de estos tres métodos de resolución son muy similares, pero el menos complejo y que nos ofrece los resultados de manera más rápida es el método Lanczos.

En las opciones que ofrece el método Lanczos se elige que halle todos los modos de vibración hasta una frecuencia de 10.000 Hertzios, aunque el número de modos a calcular se restringirá más adelante.

Otro dato que pide el método Lanczos es el tamaño de bloques, esto es el máximo número de modos que tienen la misma frecuencia. Si se analiza el eje libre, sin restricciones, los 6 primeros modos tienen una frecuencia nula. Por lo tanto el tamaño de los bloques será de 6, y como se muestra en la Tabla 9 el máximo número de bloques será de 35 [6].

Tabla 9. Elección del número de bloques

Block size	Maximum number of block Lanczos steps
1	80
2	50
3	45
≥ 4	35

Una vez introducidos los datos, el Step se mostraría como en la Figura 4.2.

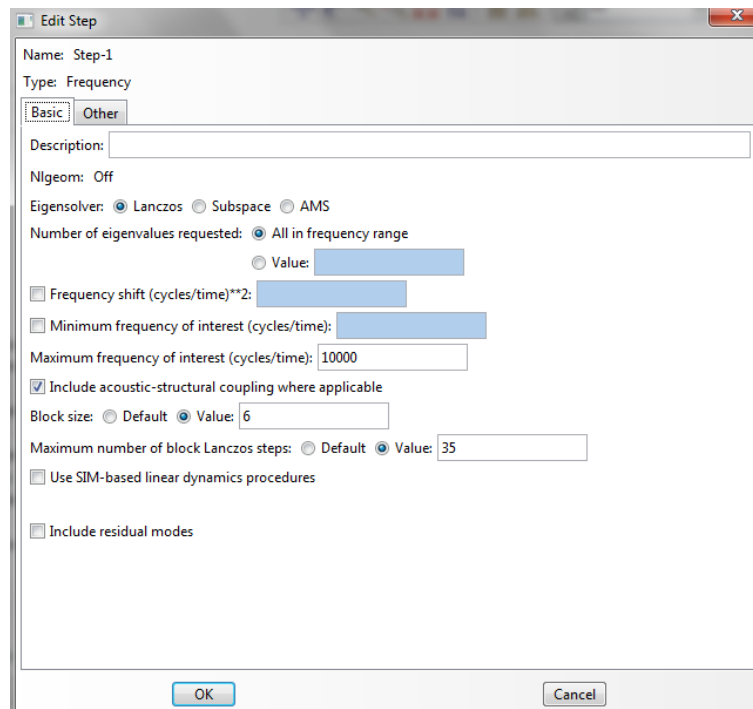


Figura 4.2 Apariencia del Step creado

Puesto que se ha elegido estudiar todos los modos con una frecuencia menor de 10.000 Hz resulta necesario filtrar estos modos. Para ello se editan los datos de salida, especificando los modos que se desean analizar, y eligiendo los resultados que se quieren obtener. En este caso se obtendrá además de la frecuencia natural el movimiento, para así observar la forma que adquiere el eje.

Con esto ya está definido el análisis completamente, ahora es necesario crear las distintas grietas que se desean analizar, el apartado más complejo de este análisis.

4.1.5 Generación de las grietas

El método a seguir para generar grietas en Abaqus consiste en crear particiones en el eje, y después crear fisuras en esas particiones.

Las particiones se han llevado a cabo dentro del módulo *Interaction*, ya que aunque varios módulos poseen esta herramienta en este mismo módulo se generan las grietas. Las particiones necesarias para realizar grietas son particiones tipo celda, es decir, particiones que creen un área en la cual podamos introducir la imperfección.

El método más cómodo debido a la geometría de la pieza es dibujar la partición en uno de los extremos y después extenderla a lo largo de la longitud del eje. En la Figura 4.3 se muestran las particiones de las distintas fisuras en uno de sus extremos.

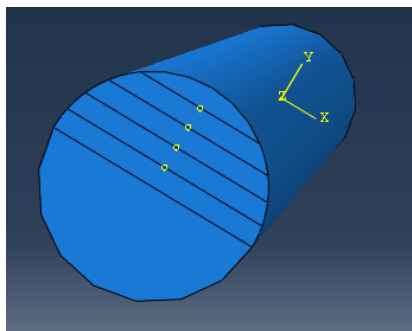


Figura 4.3 Particiones creadas para las fisuras

A continuación es necesario extender estas particiones a toda la pieza, para así más tarde poder seleccionar el área necesaria para cada fisura. En la Figura 4.4 se muestran las particiones extendidas a todo el eje.

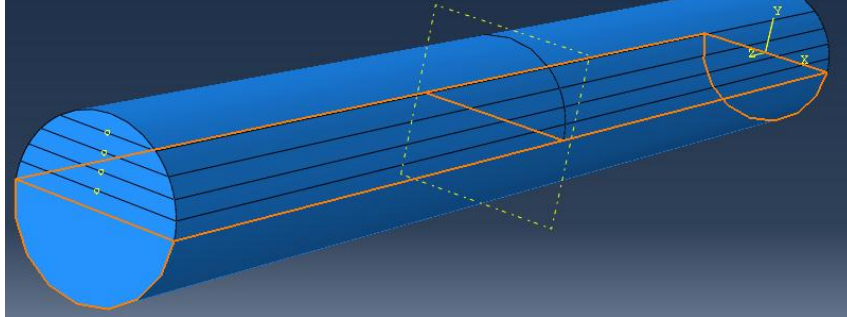


Figura 4.4 Particiones ya extendidas a toda la superficie

Como se puede observar en la figura anterior es necesario crear otra partición en las secciones donde se desee introducir la fisura. En este caso se va a explicar como se ha creado la fisura número 20 en la sección central, donde se ha generado otra partición.

Una vez creada la zona donde se encontrará la fisura se debe asignar esta superficie. En la Figura 4.5 se muestra la zona a seleccionar.

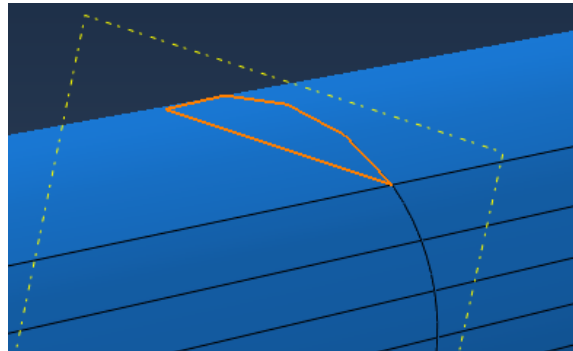


Figura 4.5 Asignación de la superficie de la fisura

Para generar definitivamente la grieta se pueden elegir dos métodos distintos, para este proyecto se ha escogido el método de *Contour Integral*, el cual produce una discontinuidad en la zona que se le indique, creando así una grieta. Esto lo consigue separando además los nodos, para así conseguir que el programa realice el análisis como si no existiese material dónde se establece la grieta. Para finalizar la grieta es necesario

definir la línea de contacto entre las superficies de la grieta y la dirección opuesta a la propagación de la fisura. La línea de contacto así como la dirección elegida aparecen en la Figura 4.6.

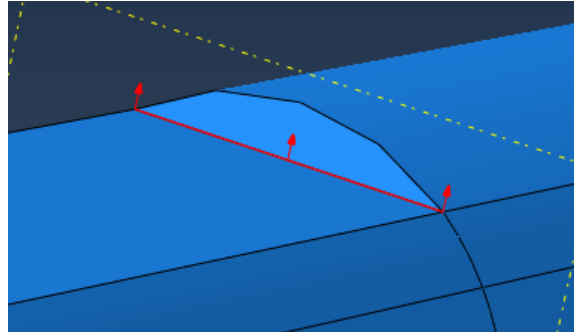


Figura 4.6 Línea de contacto y dirección de la fisura

Con este procedimiento se ha generado la fisura a través del método *Contour Integral*, pero cabe destacar que mediante este método no es posible estudiar la propagación de la fisura, para ello sería necesario recurrir al método *XFEM*, el cual no ha sido empleado ya que el estudio no se centra en la propagación de fisuras y éstas permanecen constantes.

4.1.6 Condiciones de contorno

Como ya se ha explicado se va a estudiar el eje empotrado, es decir, sus caras extremas estarán restringidas de todo tipo de movimiento, tanto desplazamientos como giros. Esta acción se lleva a cabo en el módulo *Load* mediante las condiciones de contorno. Para asignar las condiciones de contorno tan solo es necesario seleccionar las superficies deseadas y elegir la opción *Enchastre*, empotrado. En la Figura 4.7 se muestra el eje con los dos extremos empotrados, además de las particiones realizadas en apartados anteriores.

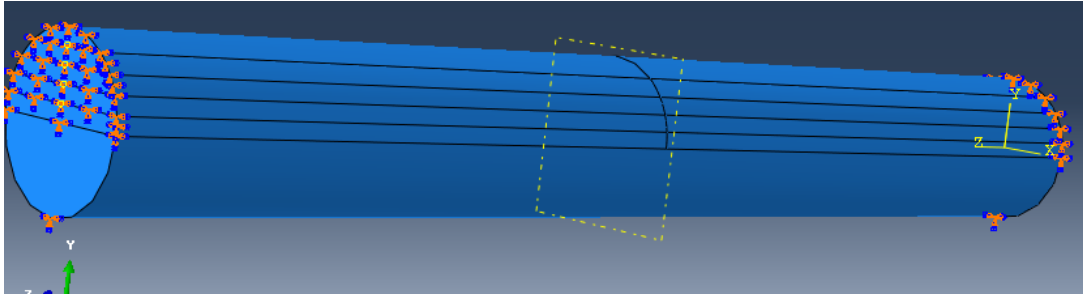


Figura 4.7 Eje empotrado en sus extremos

4.1.7 Mallado

Como ya se ha explicado en el Capítulo 3 el mallado a utilizar va a estar formado por unos elementos con un tamaño aproximado de 1 cm y un coeficiente en líneas curvas de 0,1.

Debido a la forma del eje y a la de las particiones realizadas para conseguir el mallado adecuado, se pueden emplear elementos hexaédricos en todas las secciones.

Para completar el mallado simplemente es necesario introducir los valores correspondientes al mallado 6 para sembrar el eje de nodos, y seguidamente mallarlo.

En la Figura 4.8 se muestran distintas secciones del eje ya mallado.

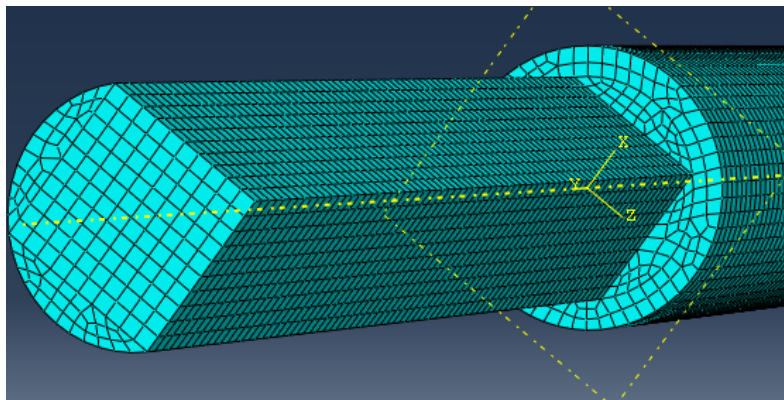


Figura 4.8 Eje mallado

4.2 RESULTADOS

En el presente apartado se muestran todos los resultados obtenidos al realizar los análisis modales, tanto del eje sin fisuras como del eje fisurado. Primero se muestran los resultados del eje sin fisuras, más adelante se mostrarán los análisis de la fisura central, y por último los resultados del eje fisurado en uno de sus extremos. En las tablas se muestran las frecuencias obtenidas en cada modo, y en las gráficas la variación que sufren esas frecuencias respecto a los valores del eje sin fisura. Las conclusiones que se extraigan de estos resultados se mostrarán en el Capítulo 6.

4.2.1 Eje sin fisura

Tabla 10. Frecuencias del eje sin fisuras

Modos Flectores		Modos Torsores		Modos Longitudinales	
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Nº Modo	Frecuencia (Hz)
1	367,95	1	1097,2	1	1788,4
2	367,96	2	2194,3	2	3567,7
3	938,29	3	3291,1	3	5327,7
4	938,32	4	4387,6	4	7055,5
5	1688,8	5	5483,5	5	8734,3
6	1688,8	6	6578,8		
7	2556				
8	2556,1				
9	3501,6				
10	3501,7				
11	4500,6				
12	4500,7				

4.2.2 Eje con fisura A20

Tabla 11. Frecuencias de los modos flectores para la fisura A20

Modos Flectores		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	366,5	0,39
2	367,86	0,03
3	938,15	0,01
4	938,33	0,00
5	1680,6	0,49
6	1688,3	0,03
7	2555,2	0,03
8	2556	0,00
9	3486,6	0,43
10	3500,8	0,03
11	4498,6	0,04
12	4500,6	0,00

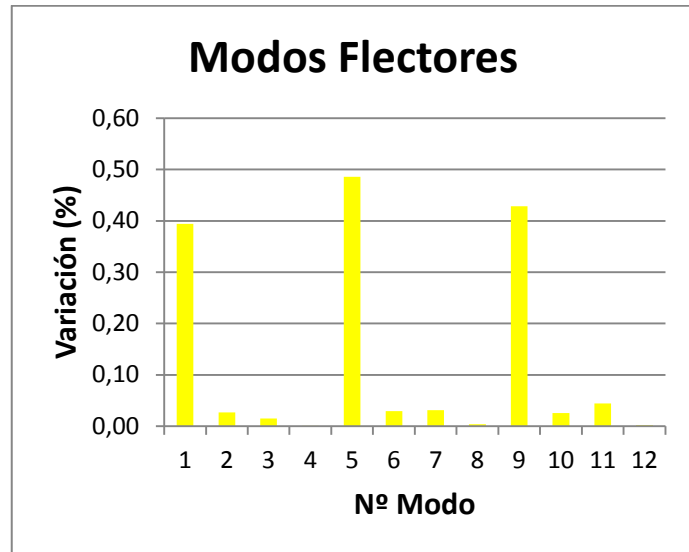


Tabla 12. Frecuencias de los modos torsores para la fisura A20

Modos Torsores		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	1097,2	0,00
2	2191,2	0,14
3	3291	0,00
4	4381,2	0,15
5	5483,4	0,00
6	6568	0,16

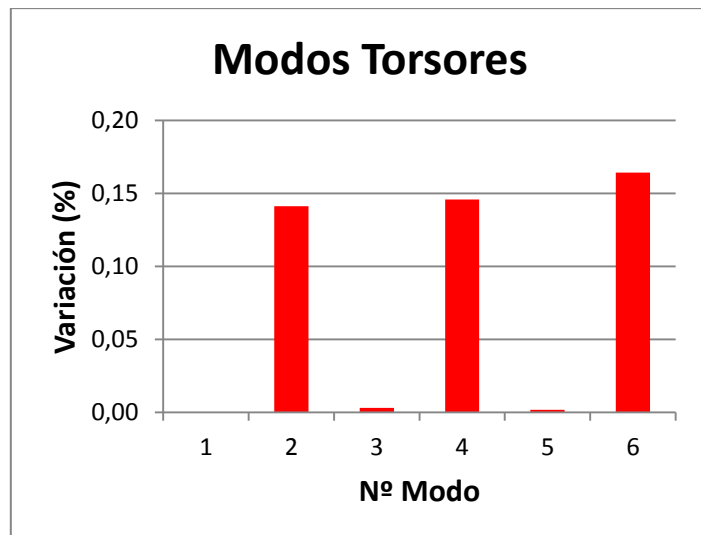
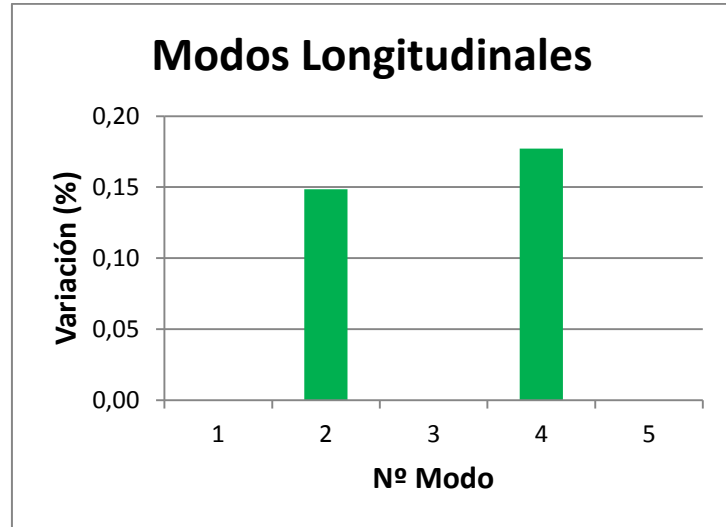


Tabla 13. Frecuencias de los modos longitudinales para la fisura A20

Modos Longitudinales		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	1788,4	0,00
2	3562,4	0,15
3	5327,7	0,00
4	7043	0,18
5	8734,3	0,00



4.2.3 Eje con fisura A40

Tabla 14. Frecuencias de los modos flectores para la fisura A40

Modos Flectores		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	361,49	1,76
2	367,48	0,13
3	938,26	0,00
4	938,79	0,05
5	1653	2,12
6	1685,6	0,19
7	2553,2	0,11
8	2556,6	0,02
9	3423,9	2,22
10	3496,5	0,15
11	4494,4	0,14
12	4501,1	0,01

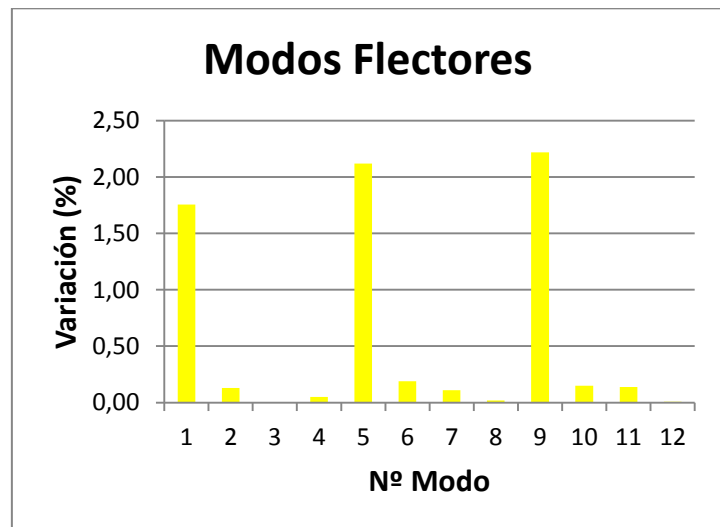


Tabla 15. Frecuencias de los modos torsores para la fisura A40

Modos Torsores		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	1099,1	0,17
2	2182,3	0,55
3	3297,1	0,18
4	4361	0,61
5	5456,7	0,49
6	6523,4	0,84

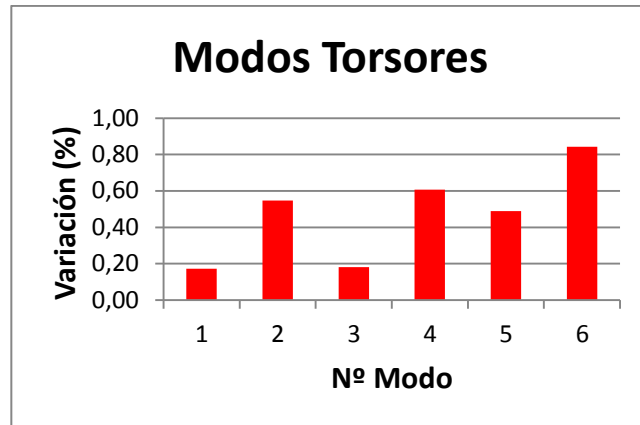
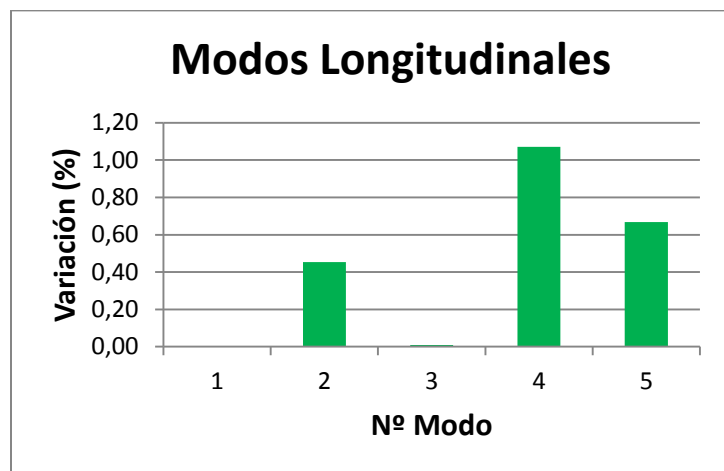


Tabla 16. Frecuencias de los modos longitudinales para la fisura A40

Modos Longitudinales		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	1788,4	0,00
2	3551,5	0,45
3	5328,2	0,01
4	6980	1,07
5	8676	0,67



4.2.4 Eje con fisura A60

Tabla 17. Frecuencias de los modos flectores para la fisura A60

Modos Flectores		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	352,27	4,26
2	365,55	0,65
3	936,61	0,18
4	938,32	0,00
5	1605,6	4,93
6	1675,1	0,81
7	2545,5	0,41
8	2553,8	0,09
9	3300,5	5,74
10	3479,1	0,65
11	4484,9	0,35
12	4493,9	0,15

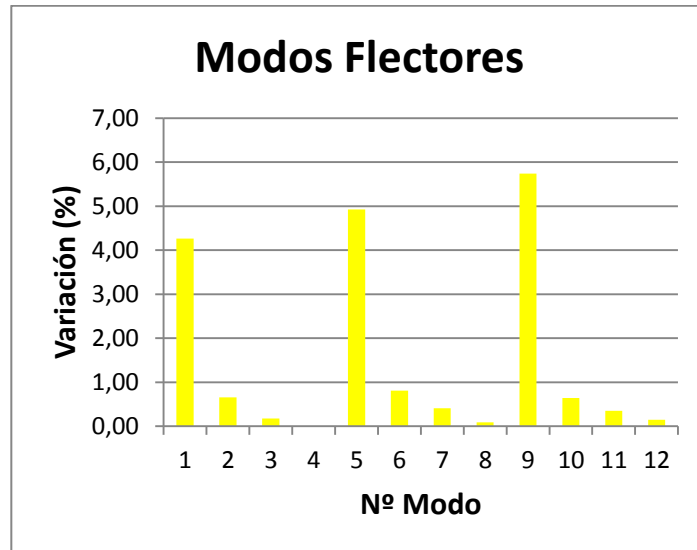


Tabla 18. Frecuencias de los modos torsores para la fisura A60

Modos Torsores		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	1099,8	0,24
2	2157,2	1,69
3	3299,1	0,24
4	4297,2	2,06
5	5364,1	2,18
6	6397,2	2,76

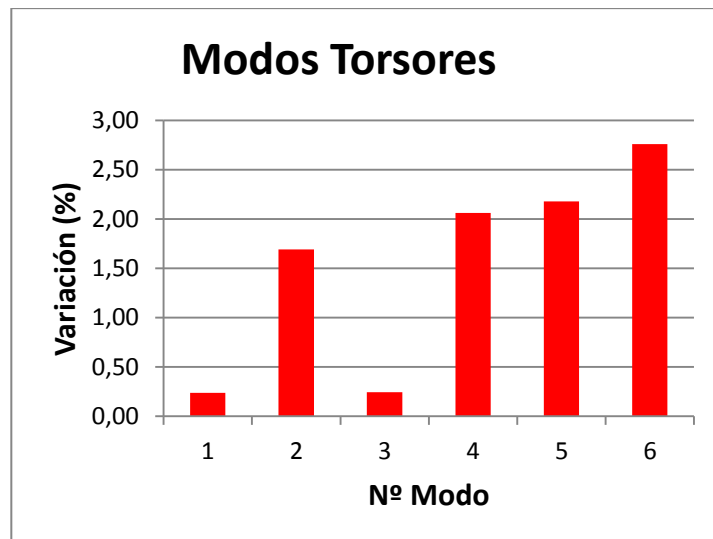
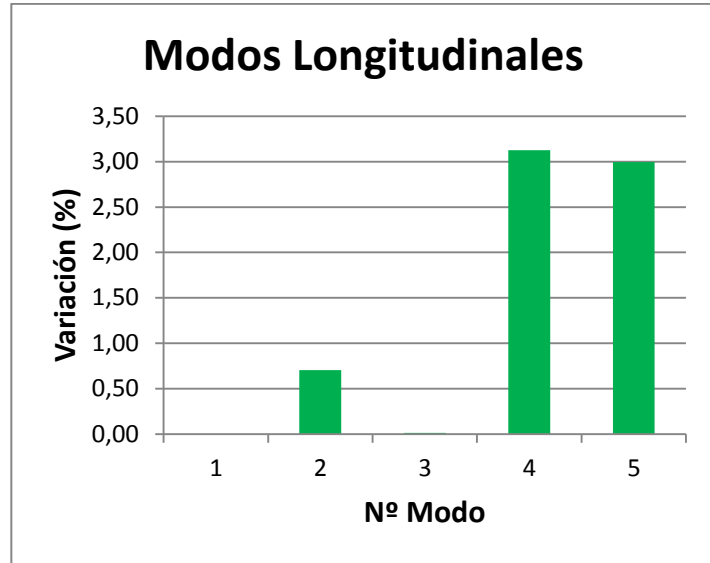


Tabla 19. Frecuencias de los modos longitudinales para la fisura A60

Modos Longitudinales		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	1788,4	0,00
2	3542,5	0,71
3	5328,4	0,01
4	6835,1	3,12
5	8472,7	3,00



4.2.5 Eje con fisura A80

Tabla 20. Frecuencias de los modos flectores para la fisura A80

Modos Flectores		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	339,76	7,66
2	361,64	1,72
3	934,38	0,42
4	937,37	0,10
5	1545,2	8,50
6	1654,3	2,04
7	2532,3	0,93
8	2547,2	0,35
9	3299,1	5,78
10	3445,7	1,60
11	4473,8	0,60
12	4475,8	0,55

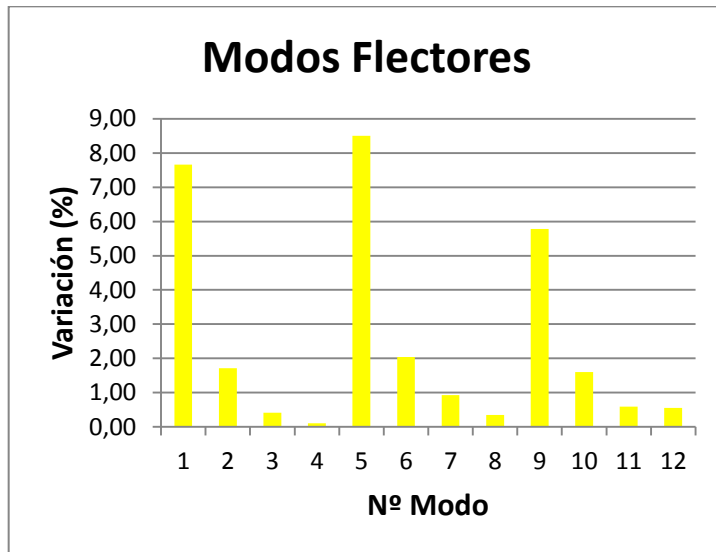


Tabla 21. Frecuencias de los modos torsores para la fisura A80

Modos Torsores		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (Hz)
1	1099,8	0,24
2	2110,2	3,83
3	3133,9	4,78
4	4172,1	4,91
5	5328,4	2,83
6	6170	6,21

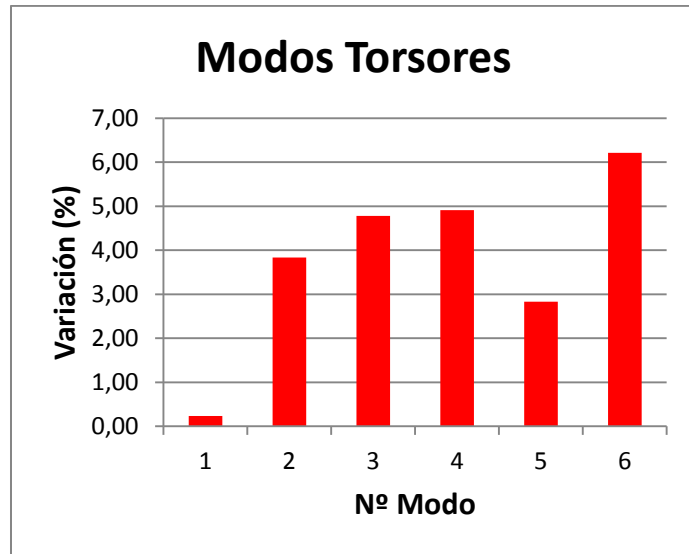
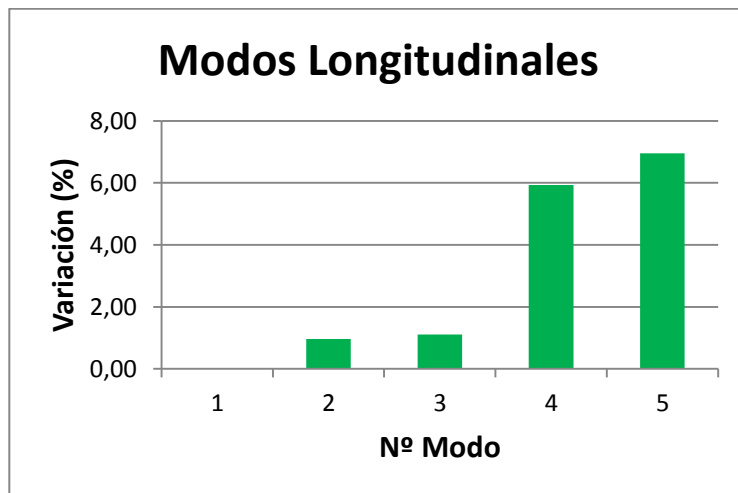


Tabla 22. Frecuencias de los modos longitudinales para la fisura A80

Modos Longitudinales		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	1788,4	0,00
2	3533,3	0,96
3	5268,7	1,11
4	6636,8	5,93
5	8126,7	6,96



4.2.6 Eje con fisura A100

Tabla 23. Frecuencias de los modos flectores para la fisura A100

Modos Flectores		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	325,85	11,44
2	354,88	3,55
3	929,57	0,93
4	935,53	0,30
5	1481,9	12,25
6	1620,2	4,06
7	2511,5	1,74
8	2534,2	0,86
9	3299,1	5,78
10	3393,4	3,09
11	4438,6	1,38
12	4458,1	0,95

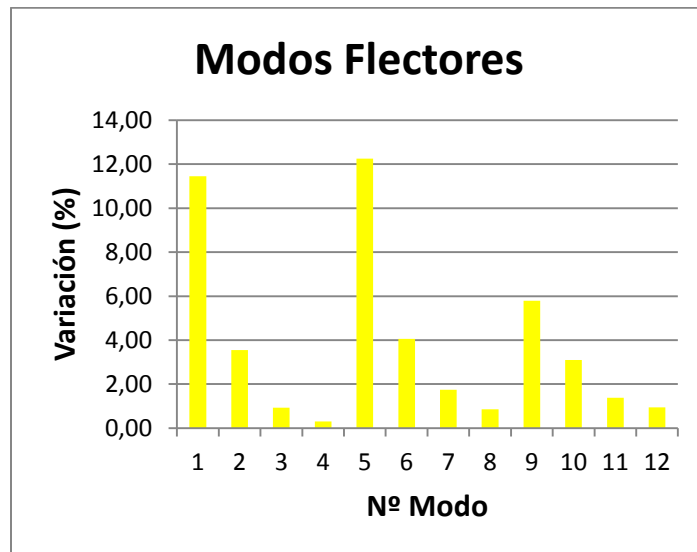


Tabla 24. Frecuencias de los modos torsores para la fisura A100

Modos Torsores		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	1099,8	0,24
2	2031,3	7,43
3	2951,4	10,32
4	3974,6	9,41
5	5328,4	2,83
6	5871,1	10,76

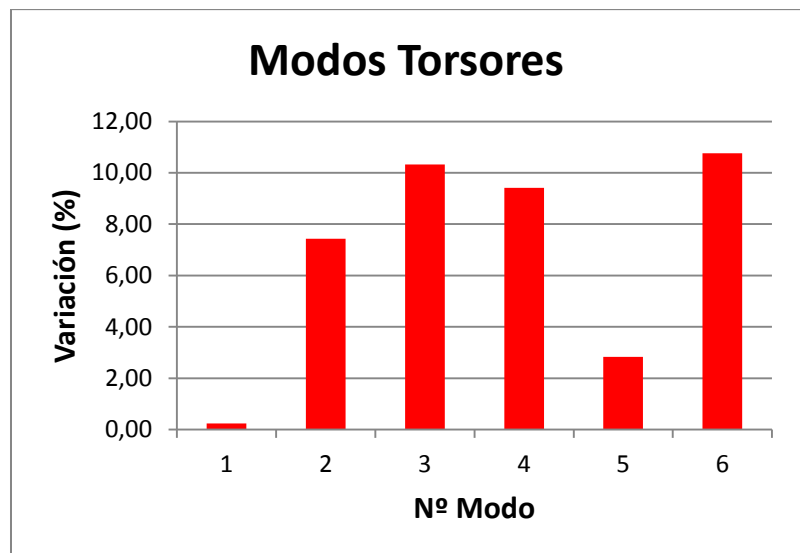
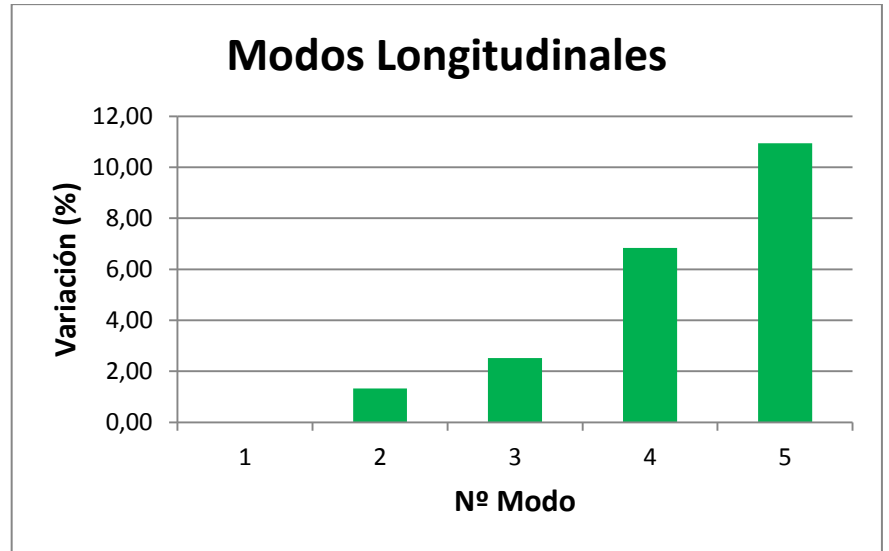


Tabla 25. Frecuencias de los modos longitudinales para la fisura A100

Modos Longitudinales		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	1788,4	0,00
2	3520,2	1,33
3	5193,4	2,52
4	6573,5	6,83
5	7778,3	10,95



4.2.7 Eje con fisura B20

Tabla 26. Frecuencias de los modos flectores para la fisura B20

Modos Flectores		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	365,43	0,68
2	367,8	0,04
3	932,85	0,58
4	937,92	0,04
5	1680,7	0,48
6	1688	0,05
7	2546,9	0,36
8	2554,6	0,06
9	3491,9	0,28
10	3499,4	0,07
11	4492,5	0,18
12	4497,5	0,07

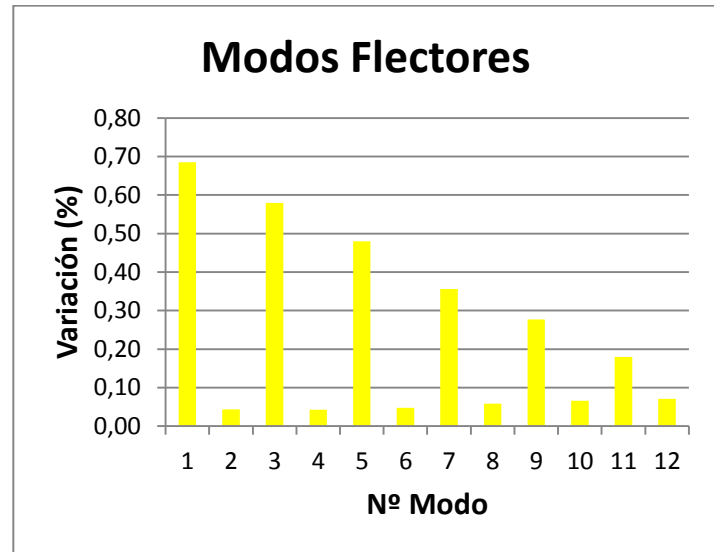


Tabla 27. Frecuencias de los modos torsores para la fisura B20

Modos Torsores		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	1096,1	0,10
2	2192	0,10
3	3287,8	0,10
4	4383,1	0,10
5	5477,8	0,10
6	6571	0,12

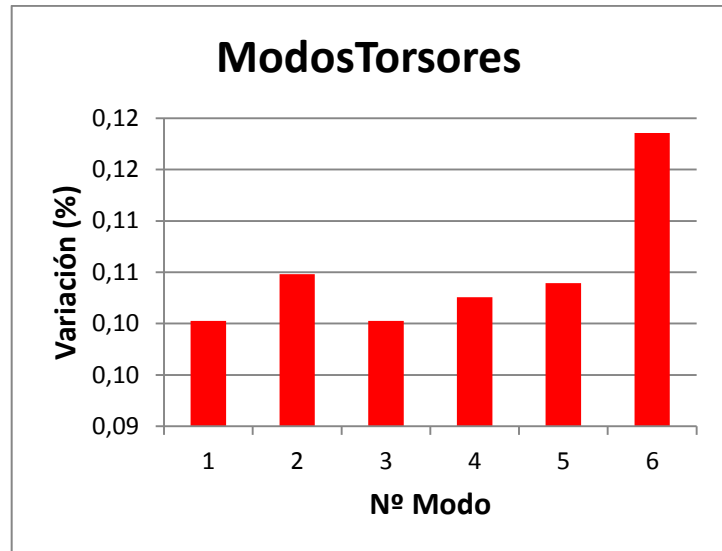
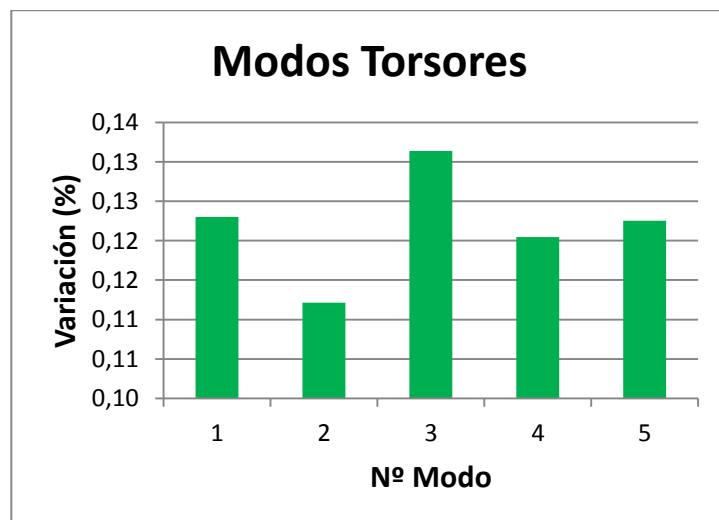


Tabla 28. Frecuencias de los modos longitudinales para la fisura B20

Modos Longitudinales		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	1786,2	0,12
2	3563,7	0,11
3	5320,7	0,13
4	7047	0,12
5	8723,6	0,12



4.2.8 Eje con fisura B40

Tabla 29. Frecuencias de los modos flectores para la fisura B40

Modos Flectores		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	358,03	2,70
2	366,72	0,34
3	918,15	2,15
4	935,51	0,30
5	1659	1,76
6	1683,9	0,29
7	2525,8	1,18
8	2548,3	0,31
9	3465,4	1,03
10	3490,6	0,32
11	4474,4	0,58
12	4486,6	0,31

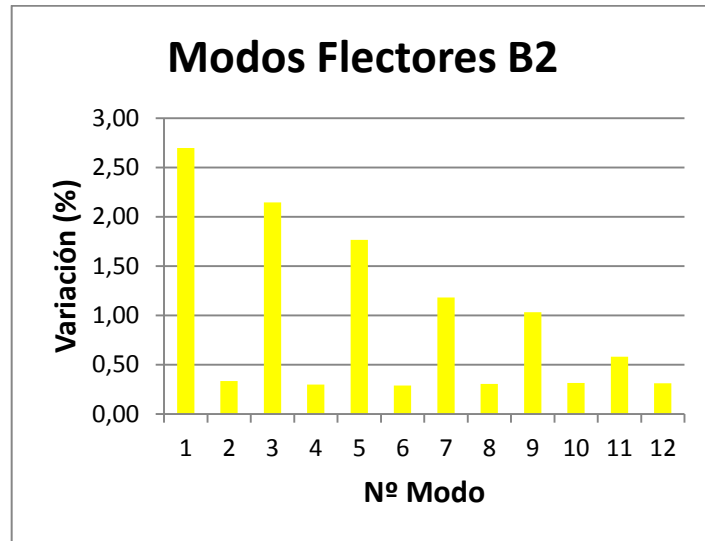


Tabla 30. Frecuencias de los modos torsores para la fisura B40

Modos Torsores		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	1091,6	0,51
2	2182,9	0,52
3	3273,6	0,53
4	4362,7	0,57
5	5447,7	0,65
6	6526,3	0,80

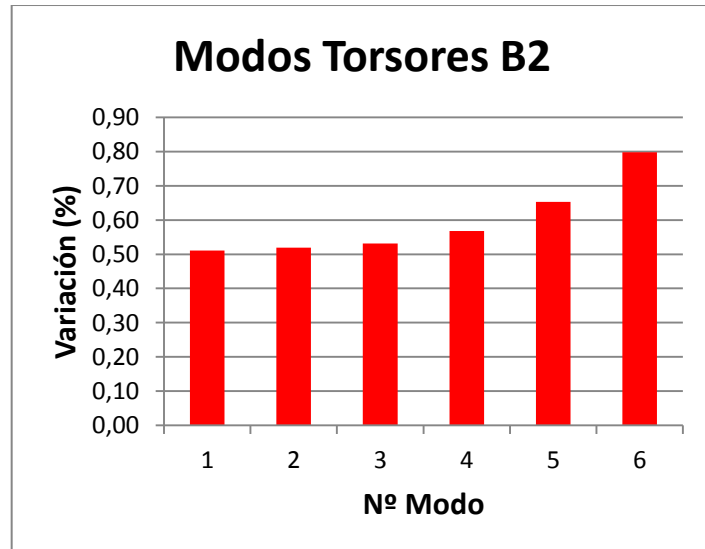
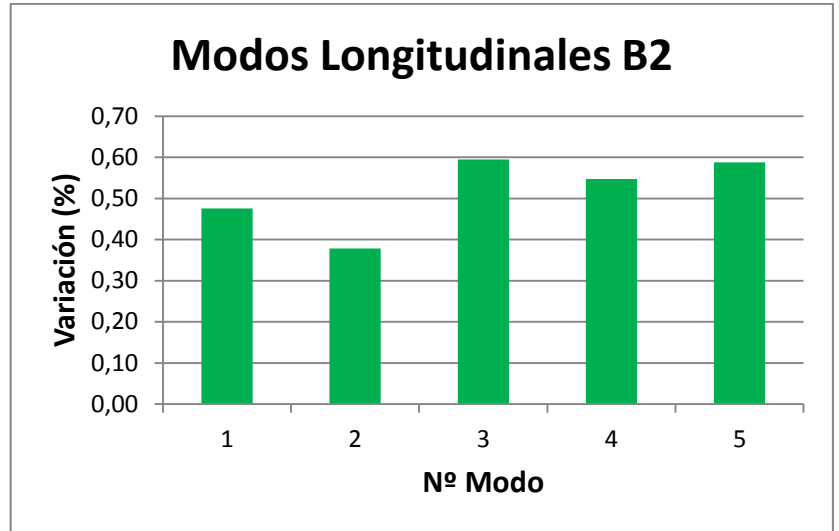


Tabla 31. Frecuencias de los modos longitudinales para la fisura B40

Modos Longitudinales		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	1779,9	0,48
2	3554,2	0,38
3	5296	0,60
4	7016,9	0,55
5	8683	0,59



4.2.9 Eje con fisura B60

Tabla 32. Frecuencias de los modos flectores para la fisura B60

Modos Flectores		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	346,68	5,78
2	364,01	1,07
3	897,87	4,31
4	929,67	0,92
5	1627,7	3,62
6	1674,3	0,86
7	2501,9	2,12
8	2534,3	0,85
9	3427,2	2,12
10	3472,7	0,83
11	4453,4	1,05
12	4468,9	0,71

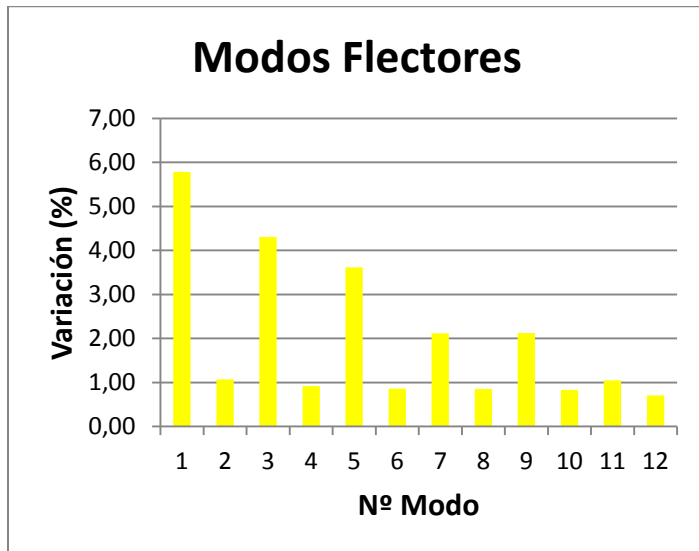


Tabla 33. Frecuencias de los modos torsores para la fisura B60

Modos Torsores		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	1083,1	1,29
2	2165,3	1,32
3	3244,7	1,41
4	4317	1,61
5	5378,1	1,92
6	6434,4	2,19

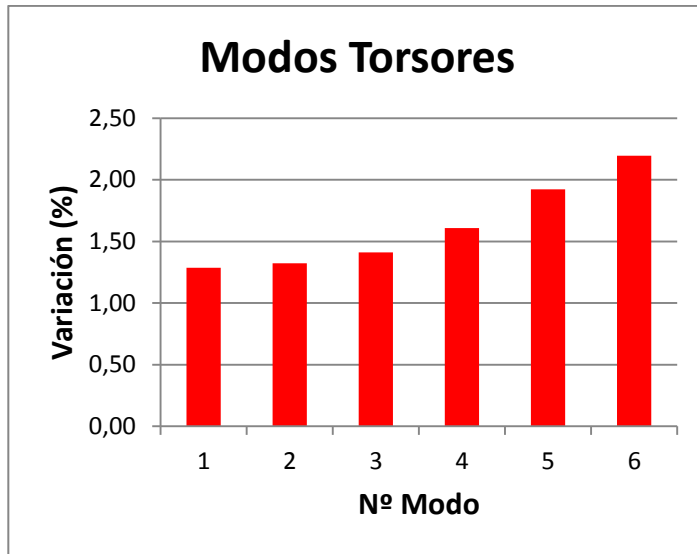
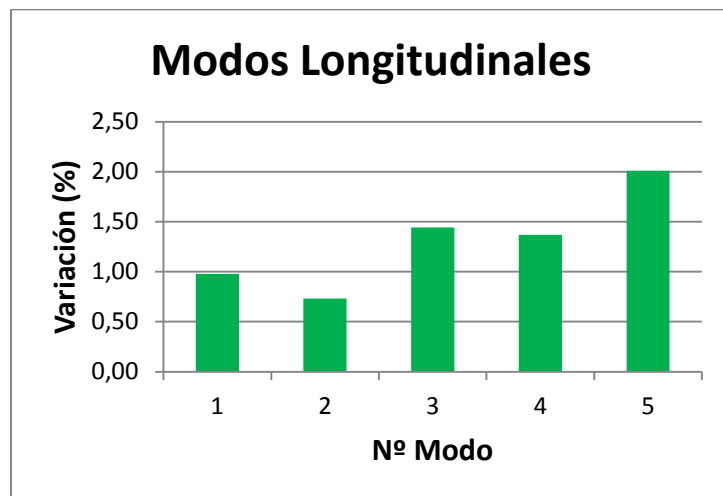


Tabla 34. Frecuencias de los modos longitudinales para la fisura B60

Modos Longitudinales		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	1770,9	0,98
2	3541,6	0,73
3	5250,9	1,44
4	6958,9	1,37
5	8558,8	2,01



4.2.10 Eje con fisura B80

Tabla 35. Frecuencias de los modos flectores para la fisura B80

Modos Flectores		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	332,57	9,62
2	358,99	2,44
3	875,1	6,73
4	919,15	2,04
5	1589,4	5,89
6	1657,3	1,87
7	2478,7	3,02
8	2510,5	1,78
9	3378,4	3,52
10	3446	1,59
11	4428,2	1,61
12	4448,6	1,16

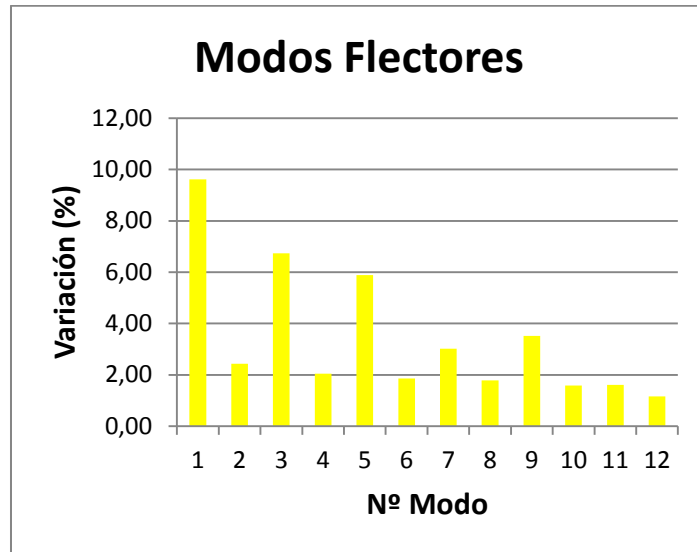


Tabla 36. Frecuencias de los modos torsores para la fisura B80

Modos Torsores		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	1069,2	2,55
2	2135,2	2,69
3	3192,4	3,00
4	4233,4	3,51
5	5264,8	3,99
6	6301,9	4,21

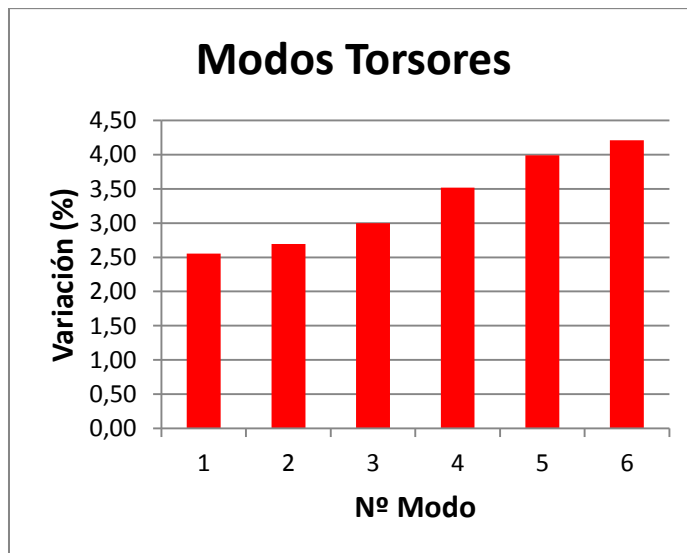
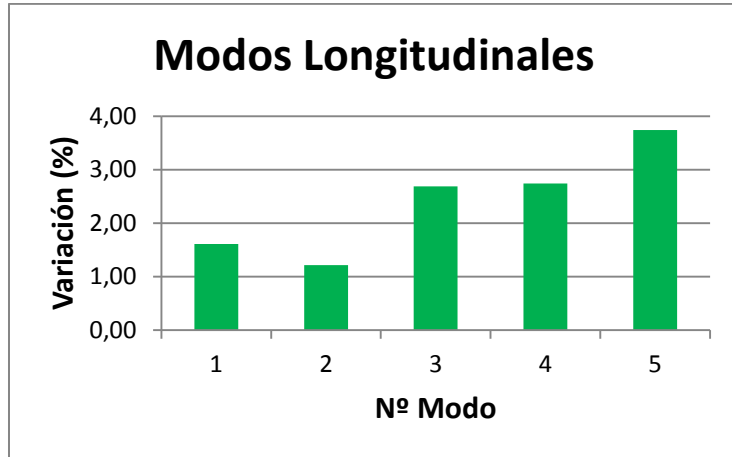


Tabla 37. Frecuencias de los modos longitudinales para la fisura B80

Modos Longitudinales		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	1759,6	1,61
2	3524,3	1,22
3	5184,4	2,69
4	6862,1	2,74
5	8407,4	3,74



4.2.11 Eje con fisura B100

Tabla 38. Frecuencias de los modos flectores para la fisura B100

Modos Flectores		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	317,47	13,72
2	350,91	4,63
3	852,5	9,14
4	902,44	3,82
5	1545,5	8,49
6	1630,4	3,46
7	2456,6	3,89
8	2474,8	3,18
9	3319,3	5,21
10	3413	2,53
11	4393,1	2,39
12	4425,9	1,66

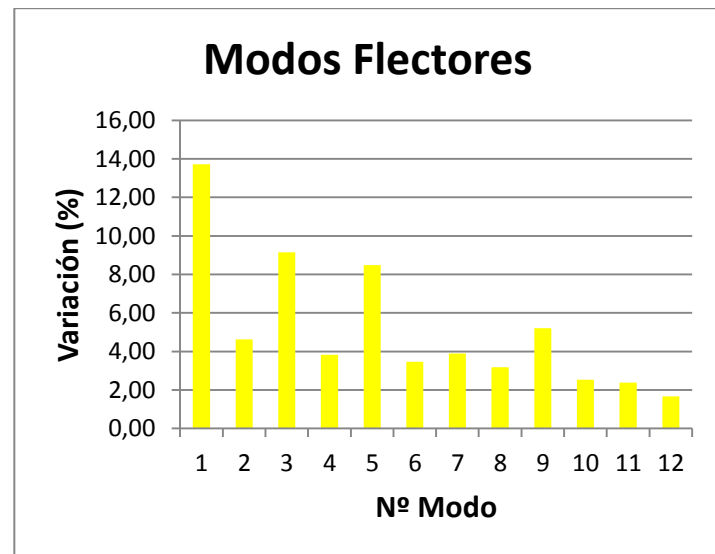


Tabla 39. Frecuencias de los modos torsores para la fisura B100

Modos Torsores		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	1046,5	4,62
2	2084,7	4,99
3	3104,9	5,66
4	4111,4	6,30
5	5126,3	6,51
6	6160,5	6,36

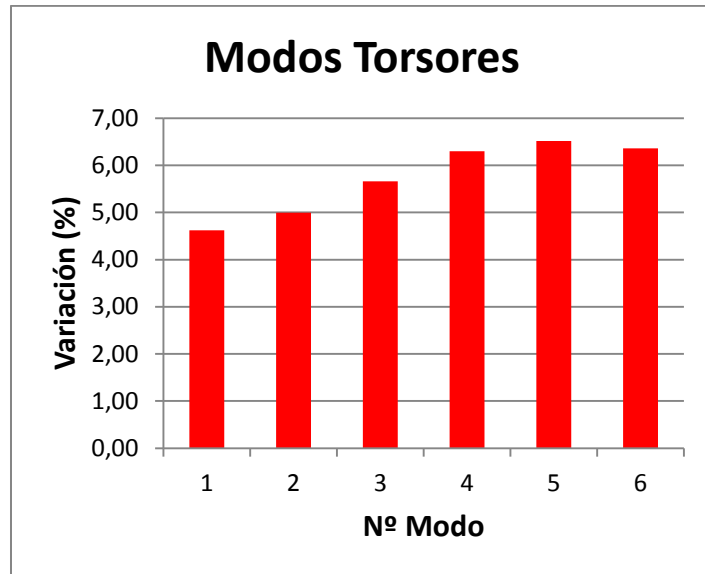
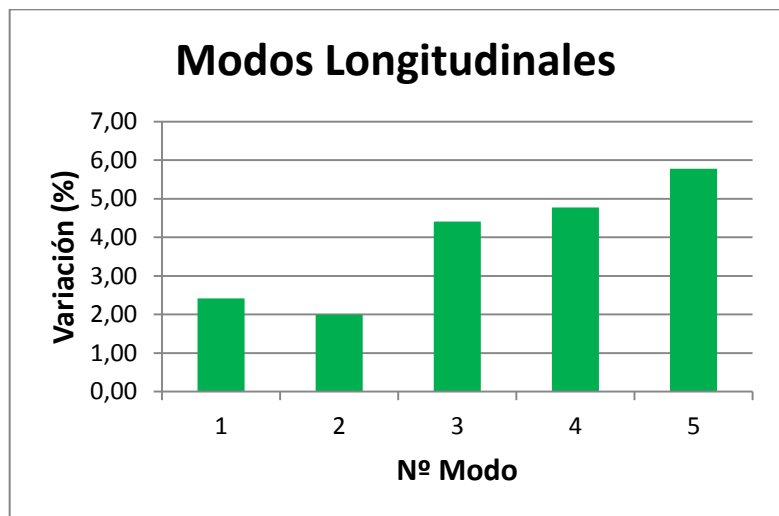


Tabla 40. Frecuencias de los modos longitudinales para la fisura B100

Modos Longitudinales		
Nº Modo	Frecuencia (Hz)	Variación (%)
1	1745,2	2,42
2	3496,7	1,99
3	5092,7	4,41
4	6718,9	4,77
5	8229,9	5,77



CAPÍTULO 5

DESARROLLO DEL SEGUNDO

PROBLEMA Y RESULTADOS

5.1 INTRODUCCIÓN

El presente capítulo va a estar estructurado de igual forma que el anterior. En un principio se va a explicar de forma resumida cómo se crea el análisis sobre la aproximación de un eje mediante secciones unidimensionales. Una vez que se haya creado el modelo, se visualizarán los resultados obtenidos y se tomarán unas primeras conclusiones, aunque las conclusiones definitivas se verán reflejadas en el Capítulo 6.

Cabe destacar que en el desarrollo de este problema no resulta necesario explicar algunas partes del proceso, ya que éstas son iguales que en el caso anterior. Estas son:

- Asignación de propiedades: ya que el material a utilizar es el mismo.
- Creación del análisis, ya que se analizan los mismos modos y mediante el mismo método.
- Condiciones de contorno, puesto que este eje también se encontrará empotrado en sus dos extremos.
- Elemento dependiente o independiente. Al igual que en el problema anterior se puede considerar como elemento independiente y mallar todo el conjunto a la vez.

5.2 DESARROLLO DEL PROBLEMA MEDIANTE ABAQUS

5.2.1 Modelado del eje

Como ya se ha explicado para este problema se va a generar un eje mediante una herramienta de Abaqus/CAE con la cual se genera un alambre con elementos unidimensionales, y más tarde a este alambre se le pueden asignar distintas secciones.

Para comenzar el modelo se debe crear una *Part* escogiendo la opción *Wire*, alambre. En este apartado será donde se fije la longitud de las secciones que compondrán el eje, así como la longitud total del eje, que como ya se ha explicado será de 1,454 m.

Una vez finalizado este apartado el eje se muestra como un alambre dividido en las distintas partes.

A continuación se crearía el material, el cual, como ya se ha explicado, es el mismo que en el problema anterior, acero al carbono templado A1N.

5.2.2 Creación y asignación de las secciones

Esta es una de las claras distinciones entre los dos problemas. En este caso se va a dividir al eje en distintas secciones, por lo tanto en este apartado se crearán esas secciones y se asignarán a las partes correspondientes del eje.

Al crear la sección se escoge la opción viga, ya que en realidad el eje será una especie de viga con sección circular. De nuevo el programa da a elegir entre viga, o viga articulada, claramente para este análisis se hace necesario que el eje esté formado por vigas fijas, ya que sus distintas secciones deben estar totalmente ligadas.

Se hace necesario el crear dos secciones distintas, cada una con un perfil, una para las zonas donde no haya fisura, y otra para las zonas donde se encuentre la grieta.

Perfil circular

Una vez que se ha seleccionado la viga fija se debe elegir el tipo de perfil, circular, e introducir el radio, en este caso 0.09 m. En la Figura 5.1 se muestra la creación de este perfil.

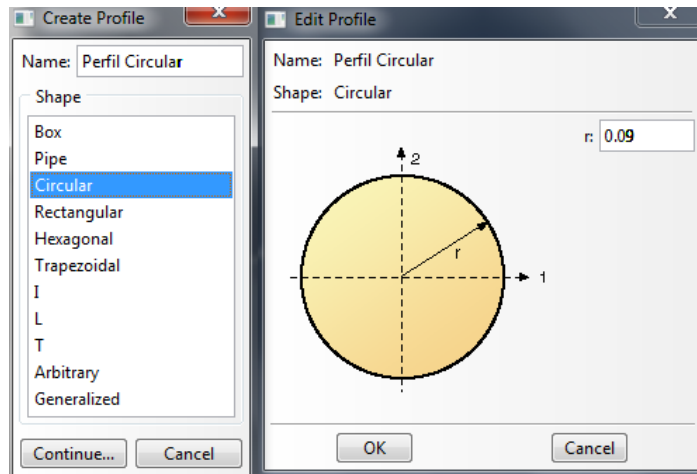
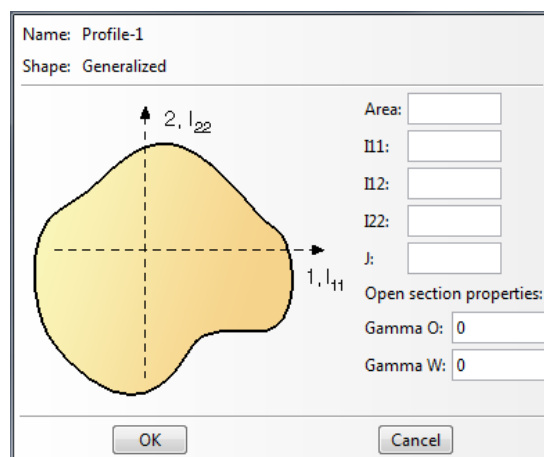


Figura 5.1 Creación del perfil circular

Perfil fisurado

Para este perfil lo ideal sería poder generar exactamente la geometría de cada sección fisurada, pero Abaqus no permite esta opción. Abaqus permite otra opción de perfil, para casos especiales de vigas como éste, ésta es la opción *Generalized*, la cual también aparece en la Figura 5.2.

Figura 5.2 Edición del perfil *Generalized*

Una vez seleccionado este tipo de perfil el programa nos pide una serie de propiedades de la sección que se desea generar. A continuación se explica cómo se han obtenido cada una de esas propiedades:

- Área

Para calcular el área de la sección fisurada se debe restar el área del segmento al área total de la circunferencia. El área de un segmento depende del ángulo θ , el cual aparece representado en la Figura 5.3.

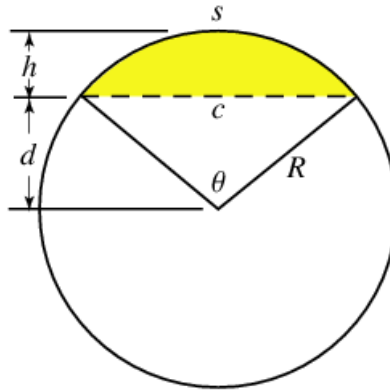


Figura 5.3 Parámetros de la sección fisurada

Este ángulo se calcula mediante trigonometría con el radio de la sección, 0,09 m y la profundidad de la fisura. Los ángulos de cada fisura se muestran a continuación en la Tabla 41.

Tabla 41. Ángulos θ de las diferentes fisuras

	Fisura 20	Fisura 40	Fisura 60	Fisura 80	Fisura 100
Angulo (°)	73,74	106,23	132,87	156,87	180
Angulo (rad)	1,29	1,85	2,32	2,74	3,14

Una vez calculados los ángulos se calcula el área del segmento recurriendo a la siguiente ecuación:

$$A_{\text{segmento}} = \frac{r^2}{2}(\theta - \text{sen}\theta)$$

Finalmente para calcular el área de la sección tan solo hay que restar el área anterior al área total del círculo de radio 0,09 m:

$$A_{\text{sección}} = A_{\text{total}} - A_{\text{segmento}} = \pi r^2 - \frac{r^2}{2}(\theta - \text{sen}\theta)$$

Con esto se llega a las áreas definitivas de las distintas fisuras, las cuales se muestran en la Tabla 42.

Tabla 42. Áreas de las secciones fisuradas

	Fisura 20	Fisura 40	Fisura 60	Fisura 80	Fisura 100
Área (m ²)	0,0241	0,0218	0,0190	0,0159	0,0127

- Momentos de inercia

Para obtener el perfil también es necesario conocer los momentos de inercia de la sección fisurada. Es necesario calcular tanto el momento de inercia sobre el eje x como el momento de inercia sobre el eje y . Para ello se va a calcular el momento de inercia de la sección circular completa, y se le va a restar el momento de inercia del segmento circular correspondiente a la zona fisurada. La ecuación principal será:

$$I_{x,y} = I_{x,y \text{ circ.}} - I_{x,y \text{ segm.}}$$

Considerando el eje x horizontal y el eje y vertical, los momentos de inercia de una circunferencia sobre estos ejes son:

$$I_{x \text{ circ.}} = I_{y \text{ circ.}} = \frac{\pi r^4}{4}$$

Para calcular los momentos de inercia del segmento es necesario recurrir a las siguientes ecuaciones [15]:

$$I_{x \text{ segm.}} = \frac{r^4}{8} \left(\theta - \sin \theta + 2 \sin \theta \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$I_{y \text{ segm.}} = \frac{r^4}{24} \left(3\theta - 3 \sin \theta - 2 \sin \theta \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

De las cuales θ y r aparecen anteriormente representadas en la Figura 5.3.

Debido a que las ecuaciones de los momentos de inercia están calculadas para los ejes originales, no se hace necesario recurrir al Teorema de Steiner y se pueden calcular los momentos directamente con las expresiones ya nombradas. Finalmente se llega a los resultados que se muestran en la Tabla 43.

Tabla 43. Momentos de inercia de las secciones fisuradas

	Fisura 20	Fisura 40	Fisura 60	Fisura 80	Fisura 100
$I_x (m^4)$	0,00004318	0,00003412	0,00002842	0,00002611	0,00002576
$I_y (m^4)$	0,00000079	0,00000397	0,00000964	0,00001717	0,00002577

- Producto de inercia

El producto de inercia se calcula atendiendo a la siguiente integral:

$$I_{xy} = \int yx dA$$

En la que cada elemento de área dA se multiplica por sus coordenadas y la integración se extiende al área de una figura plana. Si una figura tiene un eje de simetría, como es el caso de las secciones fisuradas como se ve en la Figura 5.4, el producto de inercia de esa superficie es igual a cero.

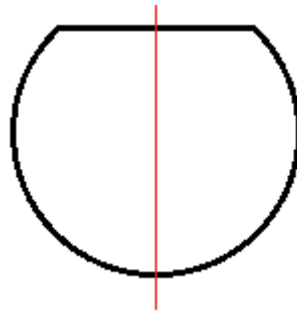


Figura 5.4 Sección fisurada y eje de simetría y

Esto se deduce de que en este caso por cada elemento dA cuya x es positiva, existe otro elemento dA' igual y simétricamente colocado, cuya x es negativa y cuya y vale lo mismo. Así los productos correspondientes $yx dA$ se anulan entre sí, por lo que la integral también se anula [4]. Por lo tanto para todas las secciones se cumple:

$$I_{xy} = 0$$

- Módulo de torsión

El modulo de torsión, J , se refiere al giro que sufre una superficie cuando se le aplican momentos torsores que tienden a producir una rotación sobre el eje perpendicular a la

superficie. Para superficies complejas, como es el caso de las fisuras que se analizan en este documento, existe la fórmula de Saint-Venant, la cual da una buena aproximación para secciones macizas, como es el caso.

$$J = \frac{A^4}{k(I_x + I_y)}$$

donde el valor de k oscila entre 35 y 40, dependiendo de la sección. Para este caso se va a tomar un valor intermedio de 37,5. Puesto que el resto de incógnitas de la ecuación ya han sido calculadas anteriormente, en la Tabla 44 se muestran los resultados del módulo de torsión para las distintas fisuras.

Tabla 44. Módulo de torsión de las distintas secciones

	Fisura 20	Fisura 40	Fisura 60	Fisura 80	Fisura 100
J (m ⁴)	0,00009614	0,00007410	0,00004967	0,00002853	0,00001356

- Módulo de cizalladura

Considerando el material del ensayo como isótropo elástico lineal, el módulo de cizalladura o módulo de elasticidad transversal está relacionado con el módulo de Young y el coeficiente de Poisson mediante la siguiente relación:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

donde el módulo de elasticidad del acero equivale a 210 GPa y para el coeficiente de Poisson se ha considerado un valor constante de 0,3. Con estos valores se obtiene un valor del módulo de cizalladura de:

$$G = 80,769 \text{ GPa} \approx 80 \text{ GPa}$$

- Centro de gravedad

Al crear la sección fisurada de manera general es necesario también añadir el centro de gravedad de la sección. Al ser una sección simétrica sobre el eje y , tan solo es necesario calcular el centro de gravedad sobre dicho eje, ya que en el eje horizontal este centro permanecerá en el origen por simetría.

Considerando la sección fisurada como una sección circular sin un segmento, se puede calcular el centro de gravedad como una sección compuesta atendiendo a la siguiente ecuación:

$$CDG_y = \frac{A_{\text{círculo}} \cdot CDG_{y,\text{círculo}} - A_{\text{segmento}} \cdot CDG_{y,\text{segmento}}}{A_{\text{círculo}} - A_{\text{segmento}}}$$

Para calcular el centro de gravedad respecto al eje y del segmento de la fisura se recurre a la siguiente ecuación:

$$CDG_{y,\text{segmento}} = \frac{4r}{3} \left(\frac{\sin^3 \frac{\theta}{2}}{\theta - \sin \theta} \right)$$

cuyas diferentes incógnitas aparecen reflejadas en la Figura 5.5:

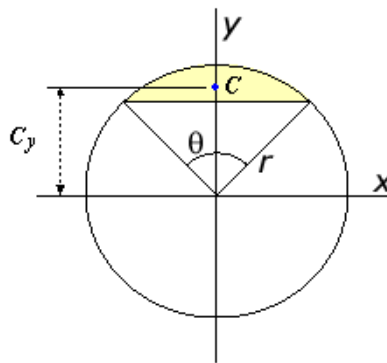


Figura 5.5 Propiedades de la sección para el cálculo del CDG

Calculando las áreas de las distintas secciones se llega a los resultados que se muestran en la Tabla 45, los cuales nos muestran los centros de gravedad de cada sección a lo largo del eje y.

Tabla 45. Centros de gravedad de las secciones fisuradas a lo largo del eje y

	Fisura 20	Fisura 40	Fisura 60	Fisura 80	Fisura 100
CDG, eje y (m)	-0,0043	-0,0114	-0,0197	-0,0286	-0,0382

Con estas propiedades ya se habrían generado las distintas secciones, a continuación se debe asignar la sección a cada elemento del alambre. En la Figura 5.6 se muestra a qué

elemento se asigna cada sección para el caso de las fisuras A (fisuras centrales). La zona fisurada aparece de color amarillo.

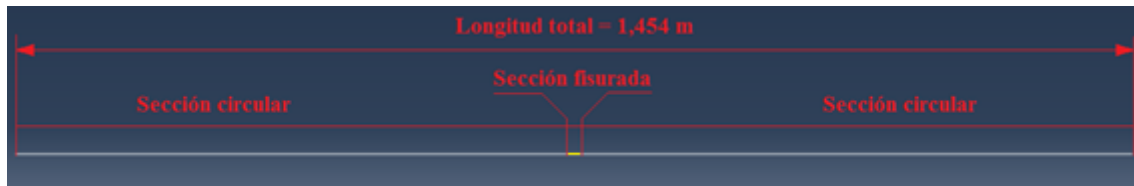


Figura 5.6 Asignación de la sección para las fisuras A

En el caso de las fisuras en la zona B (zona exterior a 10 mm del borde del eje) los elementos quedarían asignados como se muestra en la Figura 5.7.

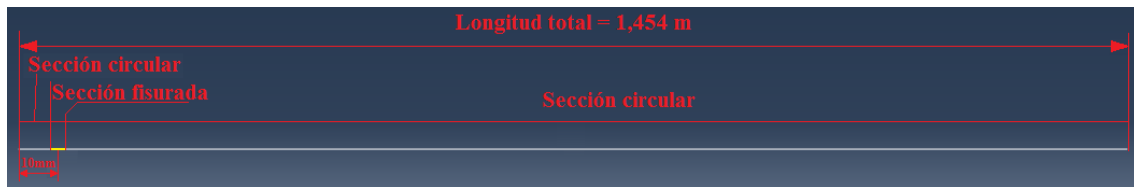


Figura 5.7 Asignación de la sección para las fisuras B

Para completar este apartado es necesario asignar una orientación al alambre. Esto se utiliza sobre todo en el caso de estructuras complejas, para que así cada viga tenga su propia orientación. Para este proyecto no es estrictamente necesario, ya que se trata de un alambre en una única dirección, pero el programa nos obliga a ello.

Basta con pulsar *Assign Beam Orientation*, y seleccionar todo el alambre. El programa asigna automáticamente una orientación al alambre y se puede continuar con el análisis.

5.2.3 Mallado

En cuanto al mallado, como ya se ha explicado anteriormente, resulta mucho más sencillo para este problema que para el anterior. Puesto que el mallado es mucho más sencillo y el tiempo de análisis menor, no se hace necesario el crear un análisis de la sensibilidad del mallado, ya que se puede conseguir un mallado muy poblado y el tiempo de análisis seguirá siendo mucho menor que el del problema en 3D.

Para realizar el mallado basta con elegir el tamaño aproximado de cada elemento. Obviamente en este problema unidimensional no podemos elegir la forma de los elementos, ni variar el control de curvatura, todos los elementos serán lineales con un nodo en cada extremo. Para el análisis se ha elegido un tamaño aproximado de elemento de 0,5 mm. Con estas medidas se genera una malla de 2908 elementos.

Si se comparan el número de elementos generado en los mallados de los dos problemas se observa una gran variación. El mallado elegido en el primer problema constaba de 49348 elementos, mientras que el segundo, como se ha explicado, está formado por 2908 elementos. Sin duda ésta será una diferencia a tener en cuenta, la cual se analizará con mayor detenimiento en el apartado de conclusiones.

5.3 RESULTADOS

En el presente apartado se van a mostrar parte de los resultados obtenidos en el problema del eje equivalente. Resulta complicado mostrar todos los resultados, ya que éstos son muy numerosos. Por ello tan solo se va a mostrar un ligero resumen de los resultados obtenidos. Todos los valores de las frecuencias que se han adquirido de los análisis se muestran en el Anexo A.

Se van a mostrar varios gráficos de convergencia para cada fisura. Debido a que para cada fisura se han analizado 23 modos distintos de vibración resulta muy engorroso el mostrar un gráfico para cada uno de los modos. Por esta razón se van a mostrar dos gráficos de convergencia para cada tipo de modo y fisura. El resto de modos, como se puede observar en el Anexo A, también convergen de la misma manera, por esta razón con mostrar varios resultados como ejemplo será suficiente. Como ejemplo se van a mostrar las gráficas de convergencia de los modos flectores 4 y 9, los modos torsores 2 y 5, y finalmente los modos longitudinales 1 y 3.

Estudiando las distintas longitudes que se han analizado (0,2 mm; 0,4 mm; 0,6 mm; 0,8 mm; 1 mm; 1,2 mm; 1,4 mm; 1,6 mm; 1,8 mm; 2 mm; 4 mm; 8 mm y 16 mm) se ha observado que para una longitud de 0,2 mm todos los valores han convergido. Algunos modos alcanzan la convergencia en longitudes mayores, pero para que resulte más sencillo observar los resultados se va a estudiar la variación entre el modelo unidimensional y el modelo en 3D para una longitud de sección fisurada de 0,2 mm.

A continuación se muestran las gráficas de convergencia para cada fisura.

5.3.1 Eje equivalente con fisura A20

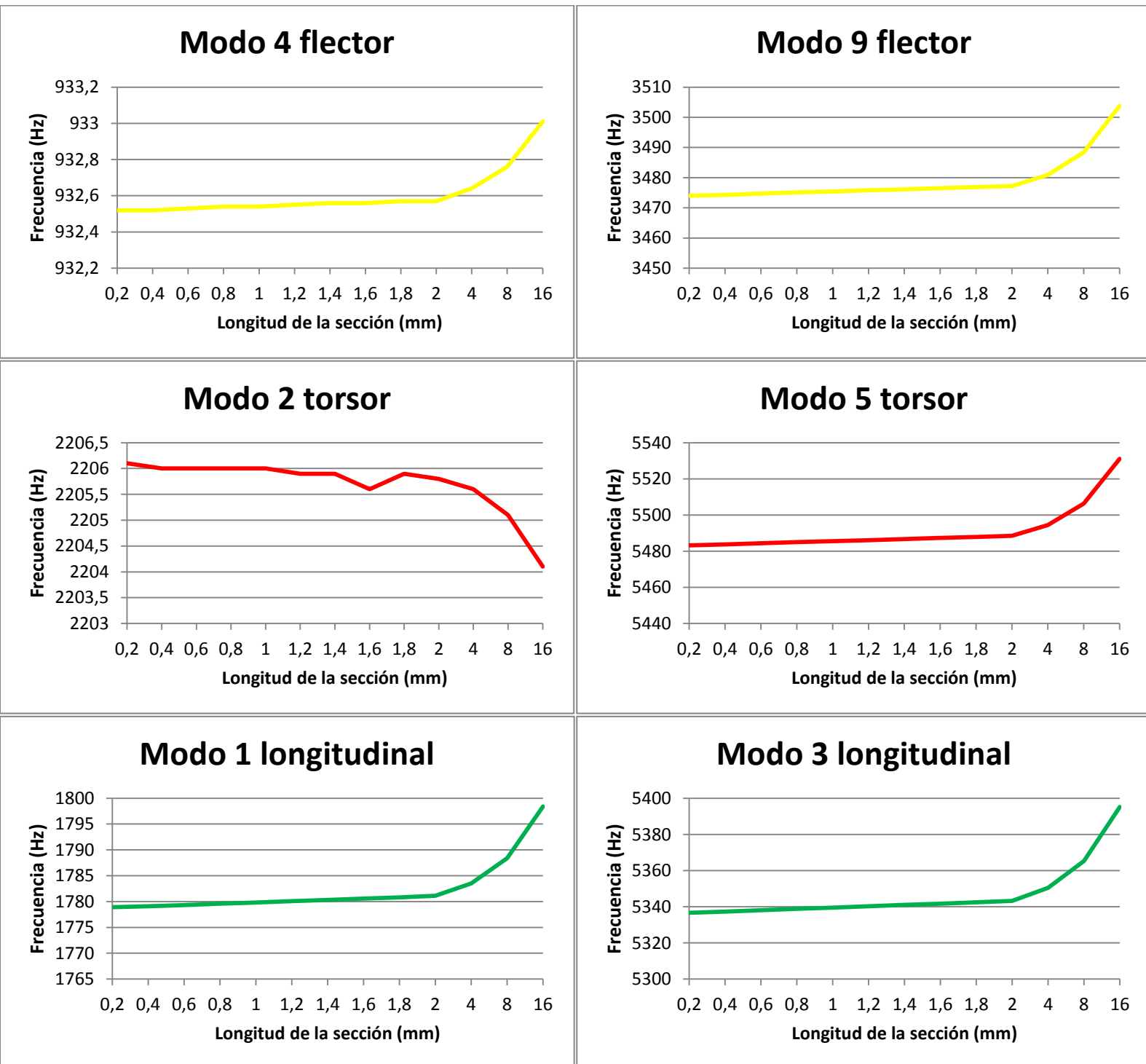


Figura 5.8 Gráficas de convergencia para la fisura A20

5.3.2 Eje equivalente con fisura A40

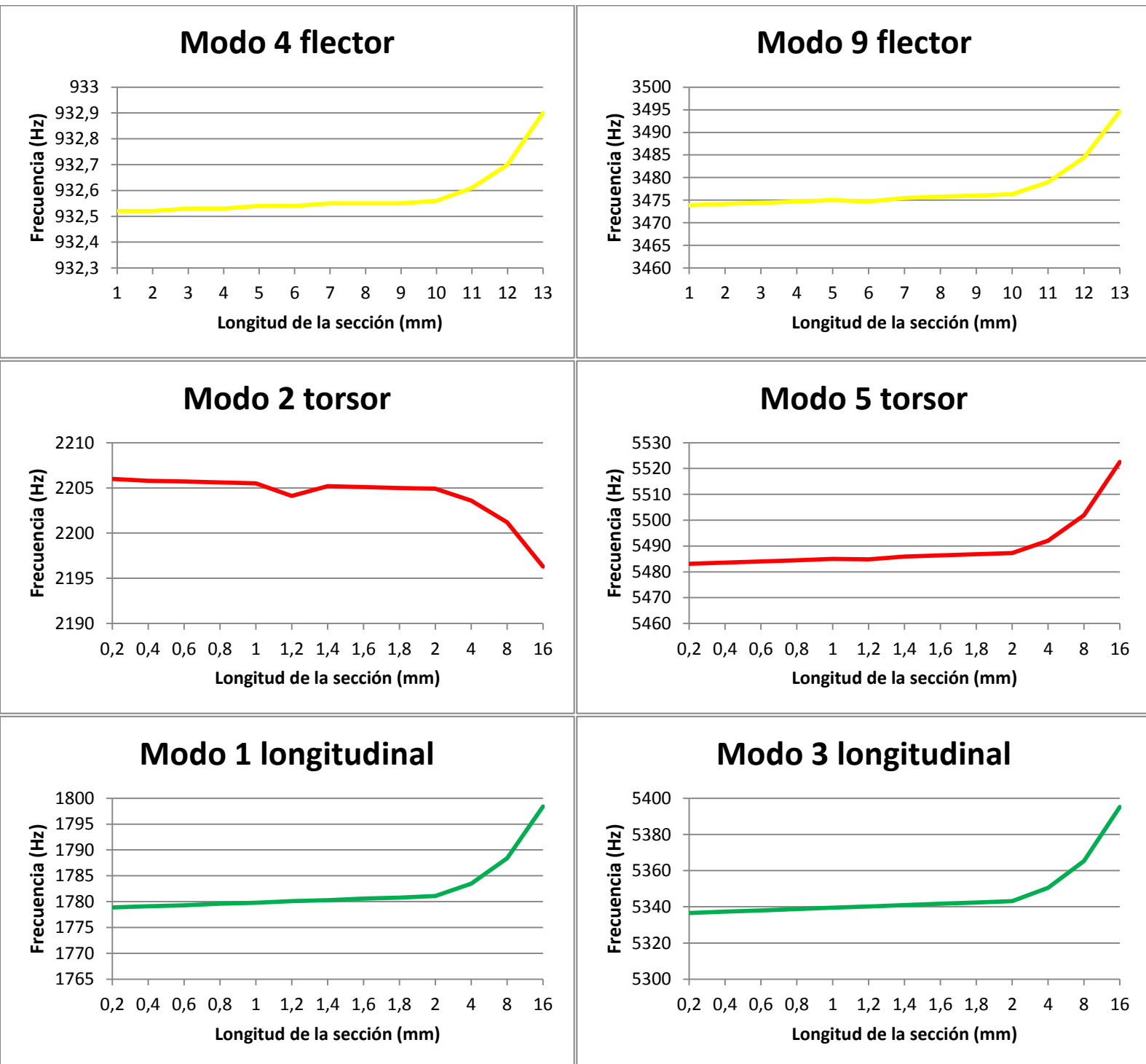


Figura 5.9 Gráficas de convergencia para la fisura A40

5.3.3 Eje equivalente con fisura A60

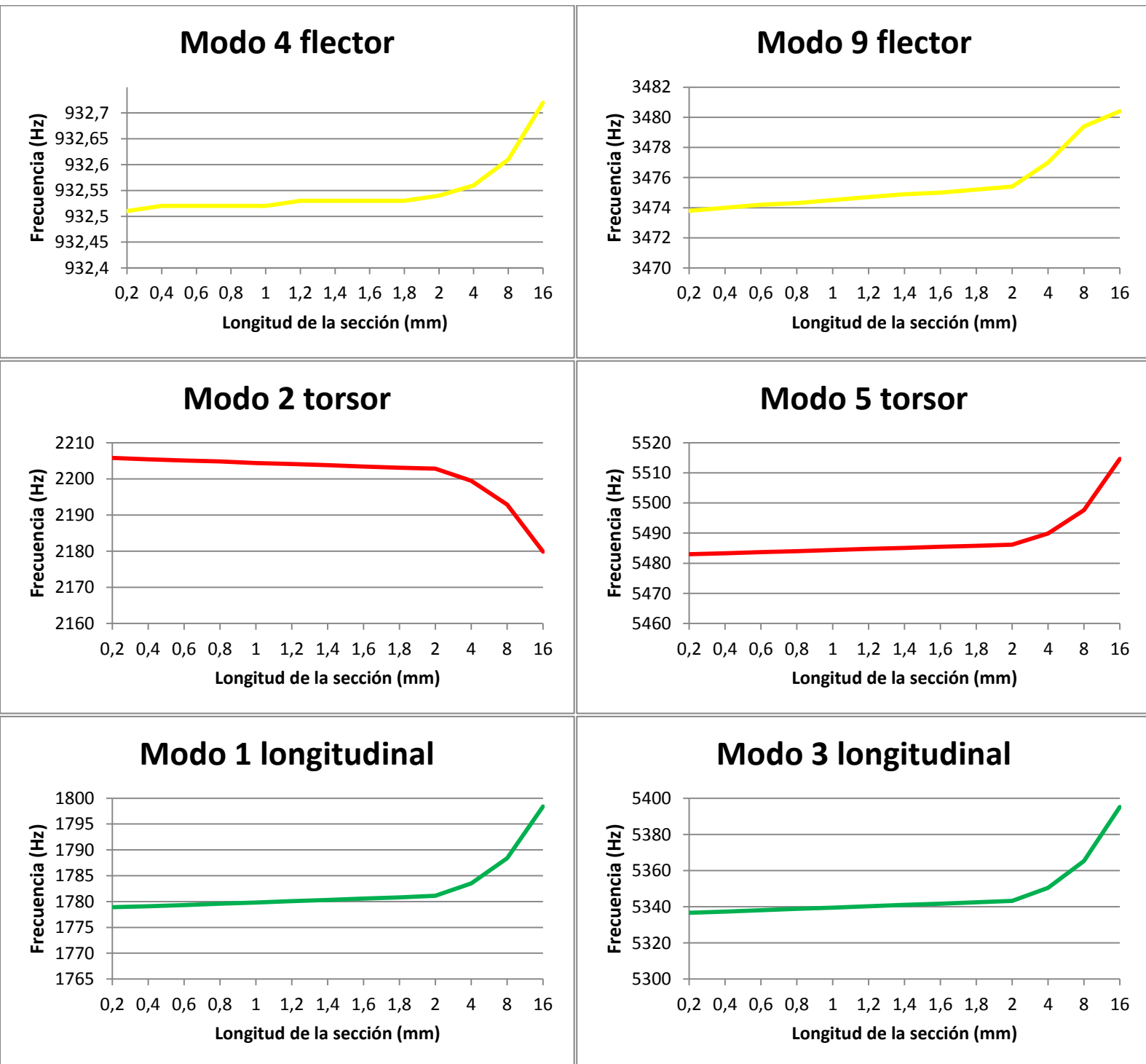


Figura 5.10 Gráficas de convergencia para la fisura A60

5.3.4 Eje equivalente con fisura A80

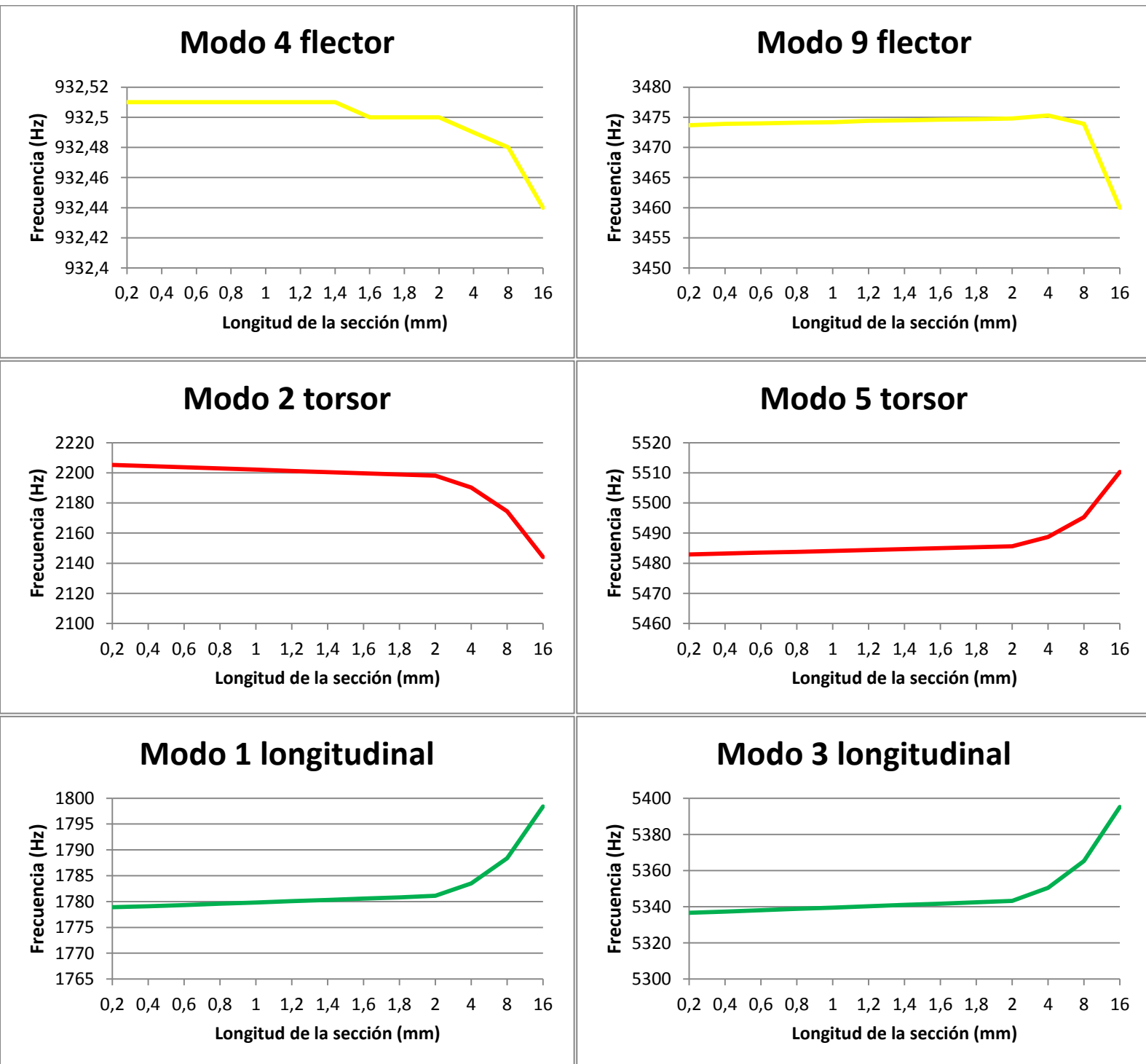


Figura 5.11 Gráficas de convergencia para la fisura A80

5.3.5 Eje equivalente con fisura A100

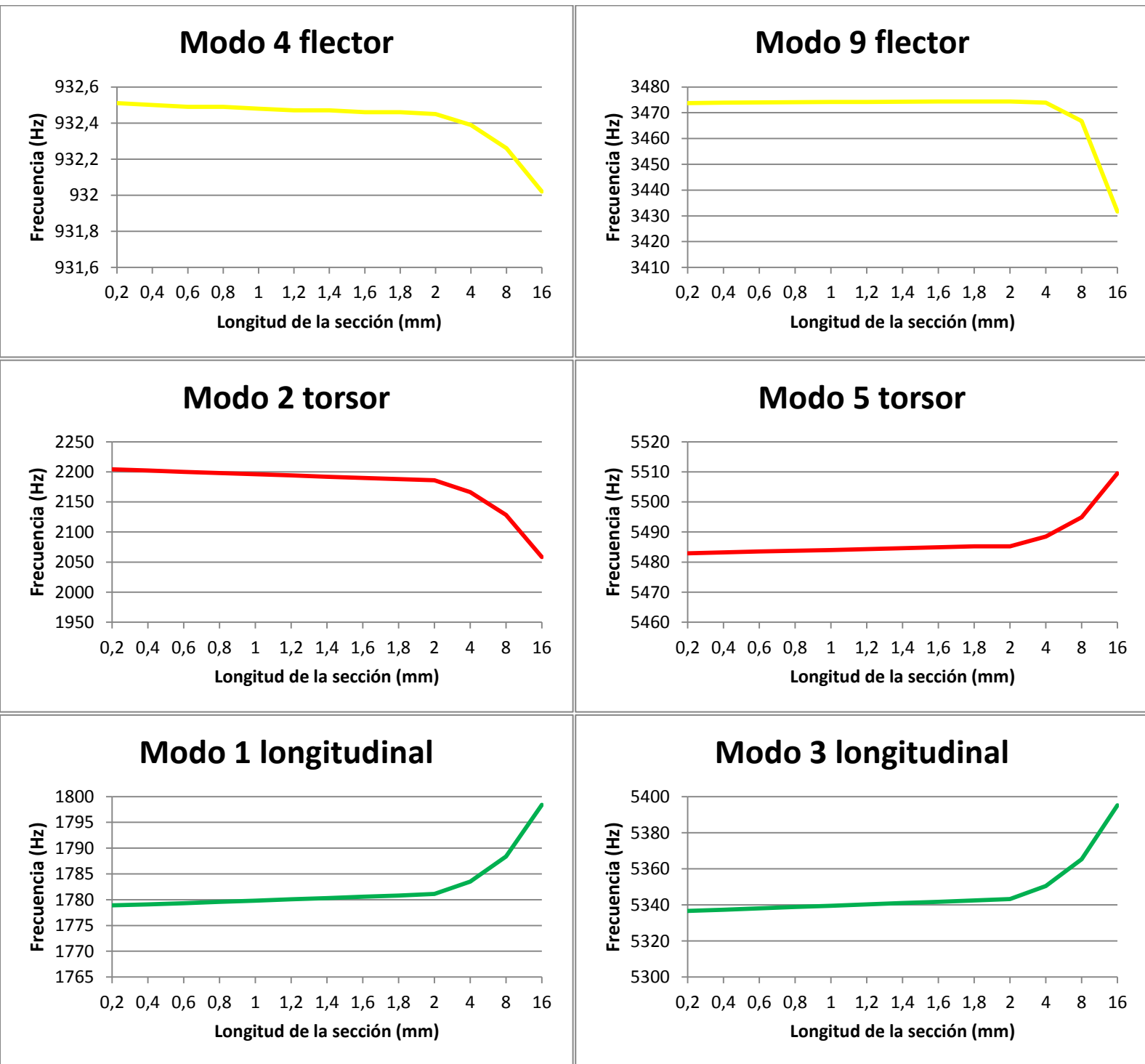


Figura 5.12 Gráficas de convergencia para la fisura A100

5.3.6 Eje equivalente con fisura B20

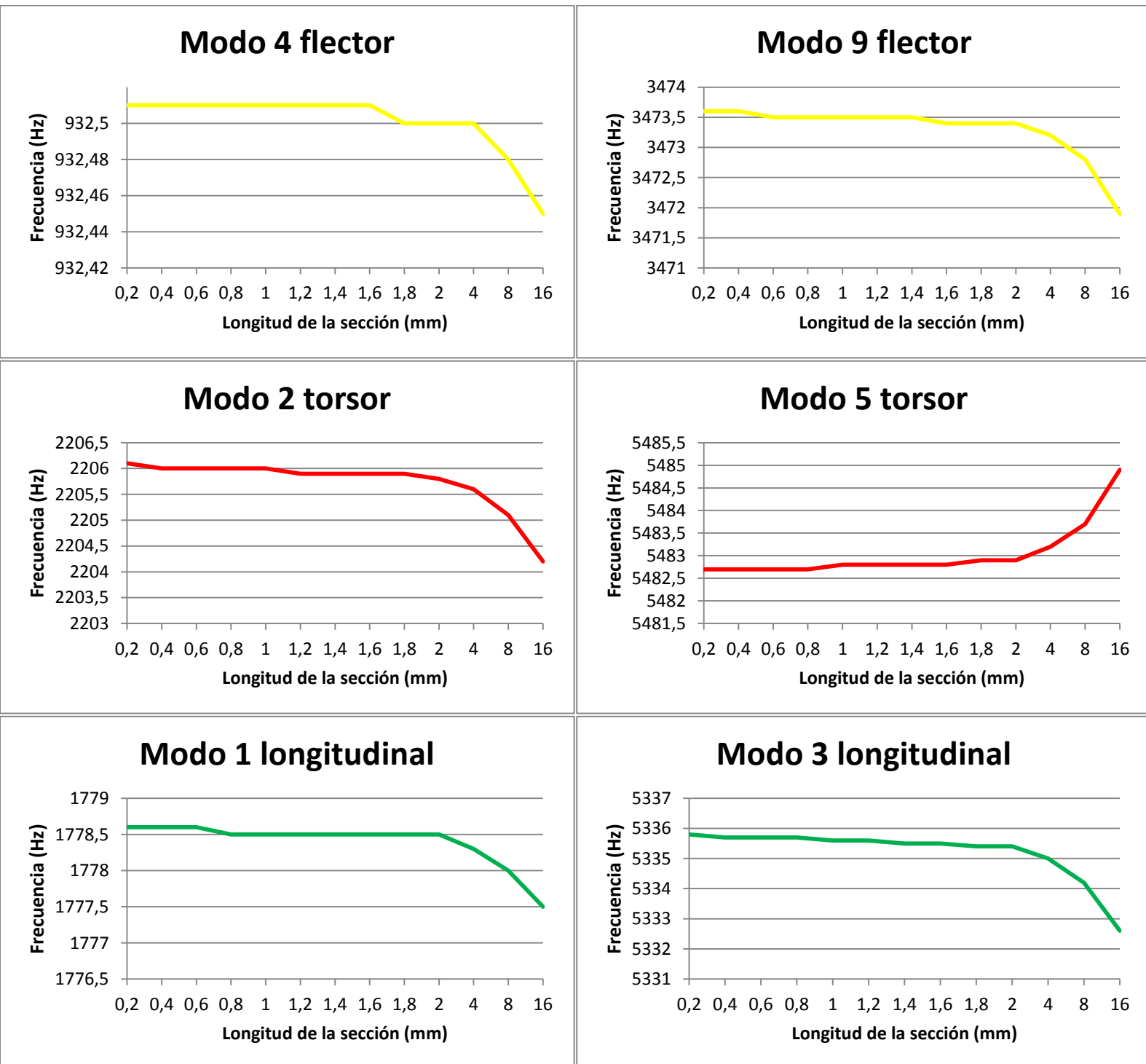


Figura 5.13 Gráficas de convergencia para la fisura B20

5.3.7 Eje equivalente con fisura B40

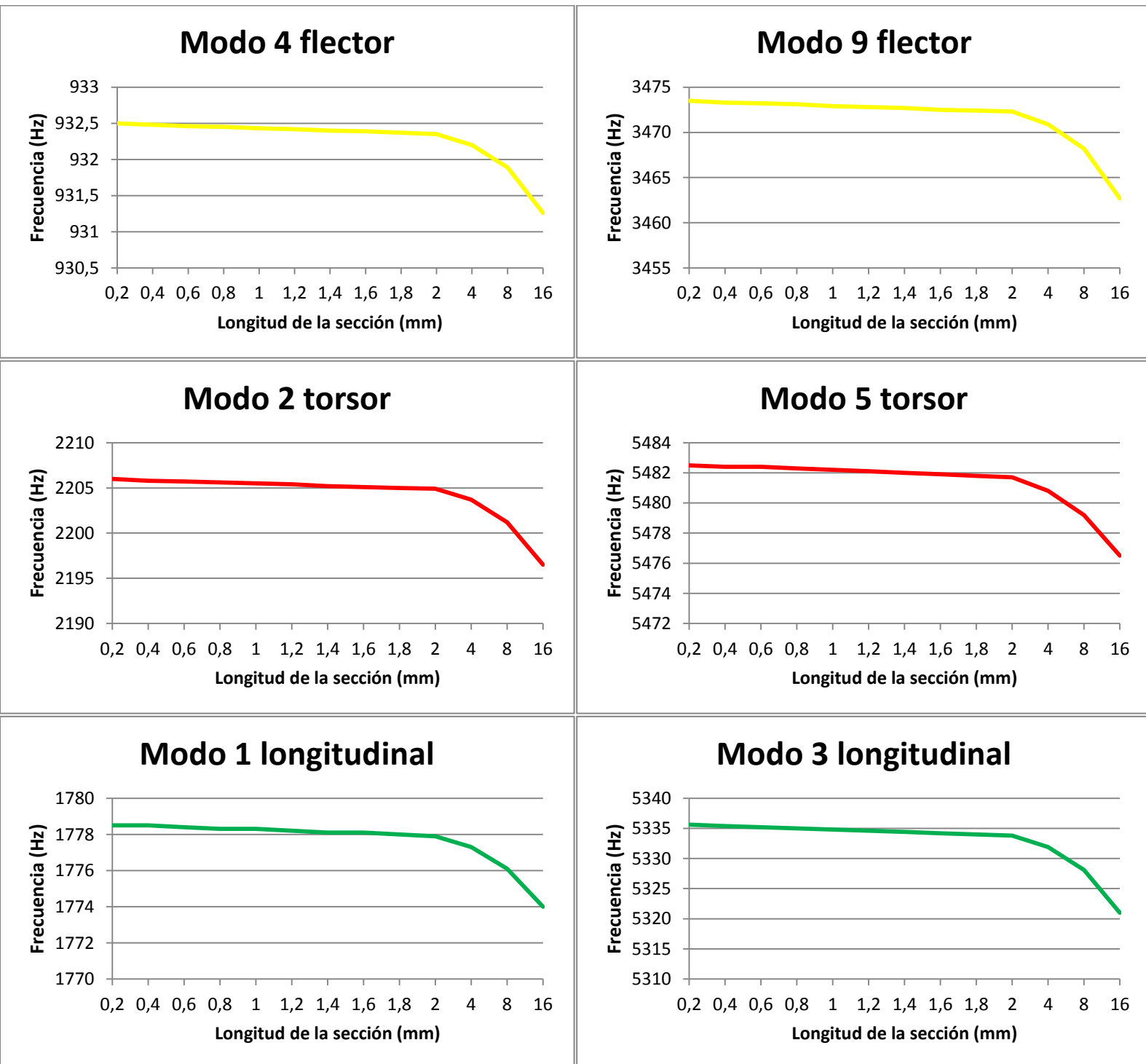


Figura 5.14 Gráficas de convergencia para la fisura B40

5.3.8 Eje equivalente con fisura B60

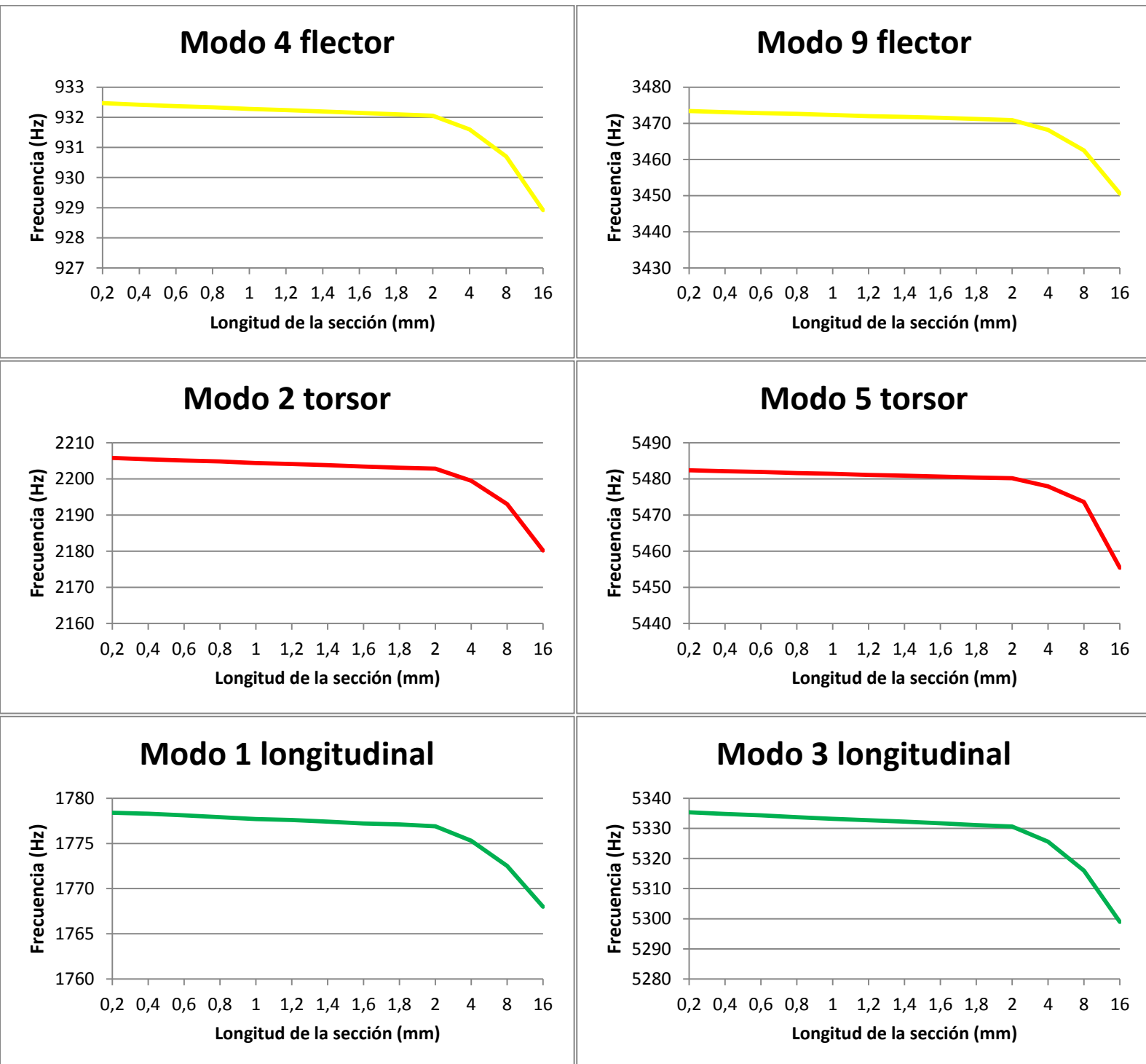


Figura 5.15 Gráficas de convergencia para la fisura B60

5.3.9 Eje equivalente con fisura B80

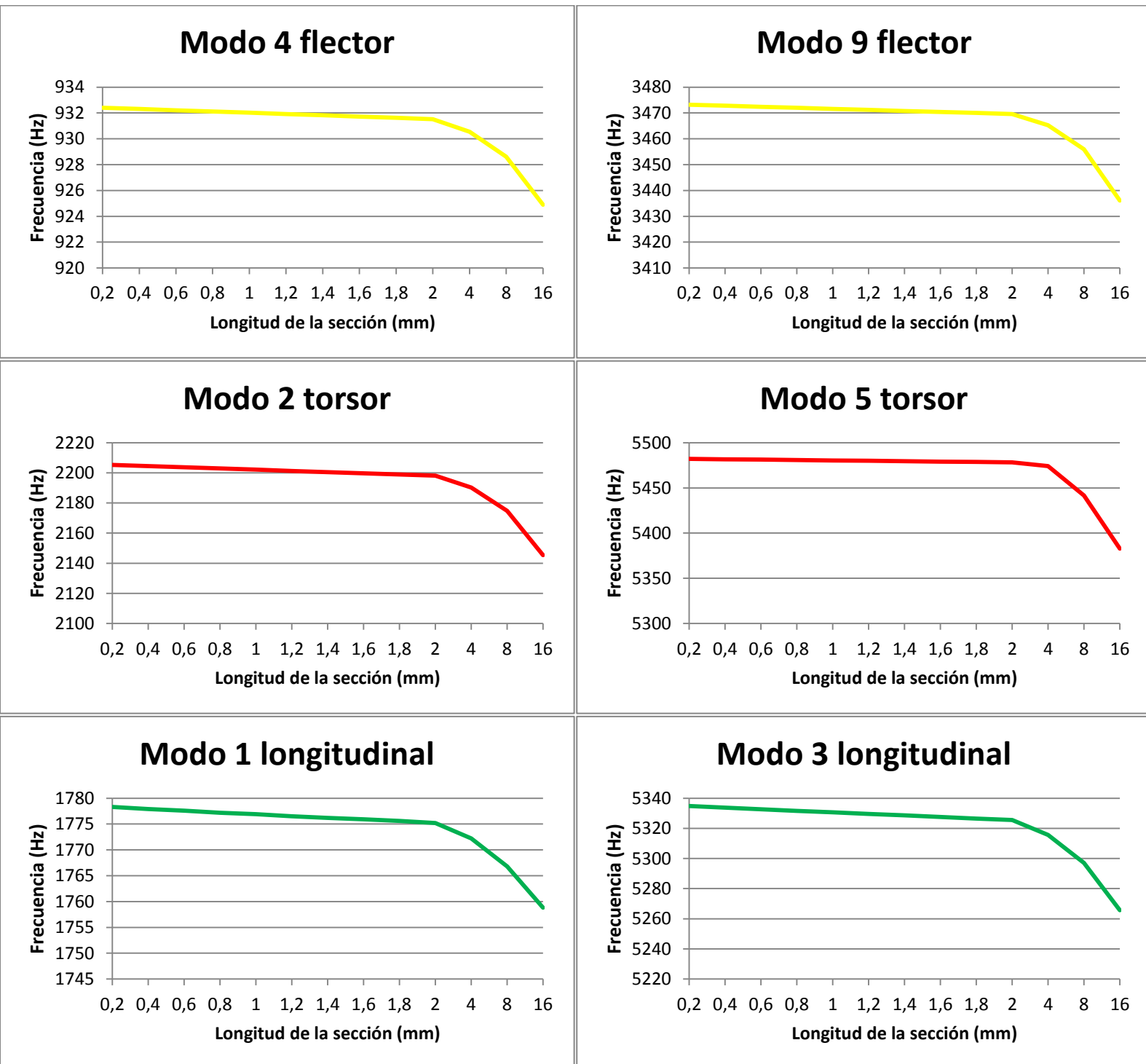


Figura 5.16 Gráficas de convergencia para la fisura B80

5.3.10 Eje equivalente con fisura B100

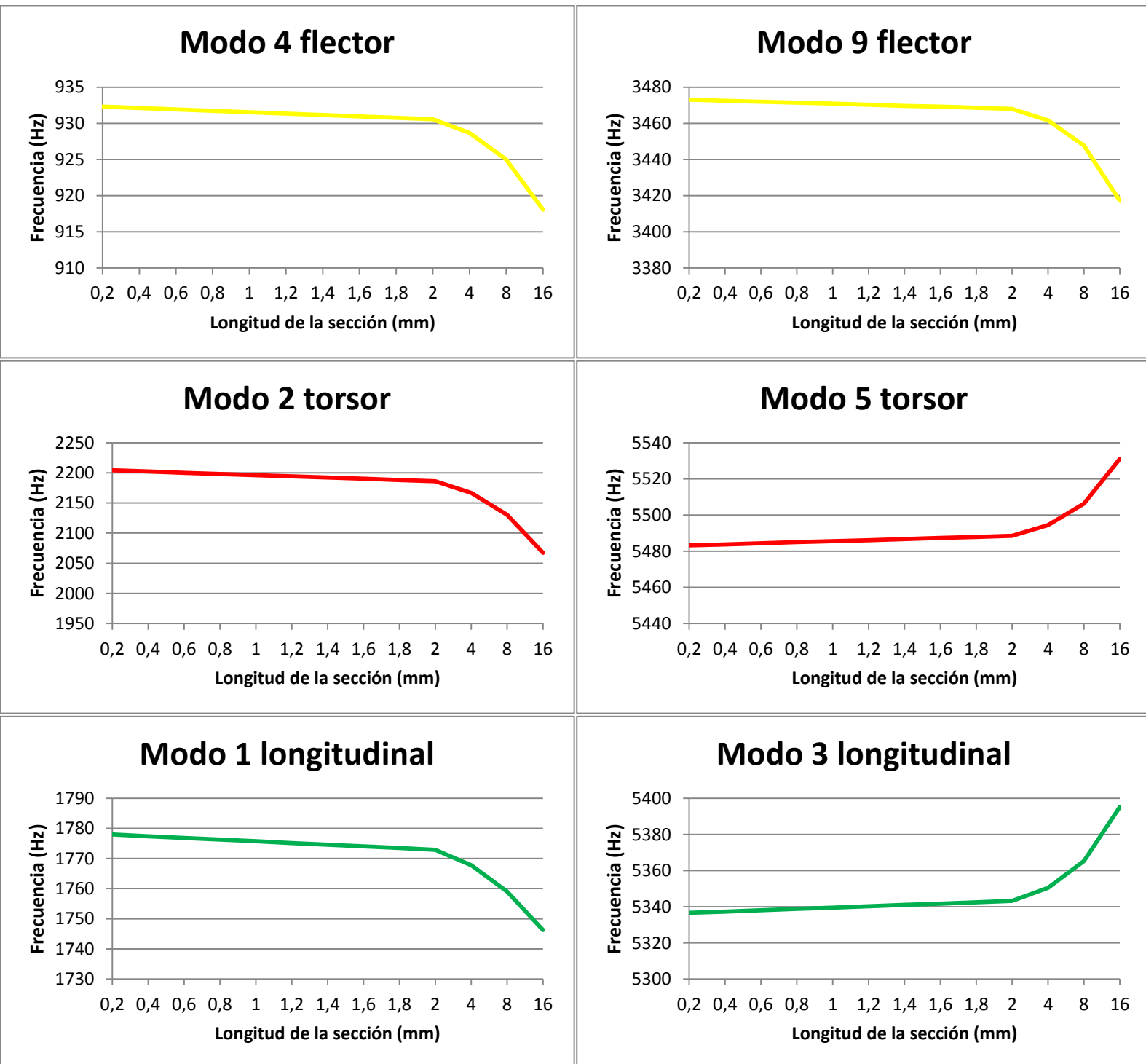


Figura 5.17 Gráficas de convergencia para la fisura B100

5.3.11 Variaciones entre el modelo unidimensional y el modelo 3D

A continuación se muestran las variaciones entre el modelo unidimensional y la frecuencia de referencia para cada fisura, distinguiendo entre los distintos modos de vibración y las distintas fisuras.

Tabla 46. Variación respecto al modelo 3D en la fisura A20

Variación con Fisura A20				
	Modo	Frecuencia en 3D (Hz)	Frecuencia con 0,2 mm (Hz)	Variación (%)
Flector	1	366,5	365,74	0,207
Flector	2	367,86	365,75	0,574
Flector	3	938,15	932,52	0,600
Flector	4	938,33	932,52	0,619
Flector	5	1680,6	1677,9	0,161
Flector	6	1688,3	1677,9	0,616
Flector	7	2555,2	2537,6	0,689
Flector	8	2556	2537,6	0,720
Flector	9	3486,6	3474	0,361
Flector	10	3500,8	3474	0,766
Flector	11	4498,6	4460,7	0,842
Flector	12	4500,6	4460,7	0,887
Torsor	1	1097,2	1103,2	0,547
Torsor	2	2191,2	2206,1	0,680
Torsor	3	3291	3309,6	0,565
Torsor	4	4381,2	4412,1	0,705
Torsor	5	5483,4	5483,2	0,004
Torsor	6	6568	6528,6	0,600
Longitudinal	1	1788,4	1778,9	0,531
Longitudinal	2	3562,4	3557,2	0,146
Longitudinal	3	5327,7	5336,6	0,167
Longitudinal	4	7043	7114,4	1,014
Longitudinal	5	8734,3	8661,9	0,829
Variación media				0,558

Tabla 47. Variación respecto al modelo 3D en la fisura A40

Variación con Fisura A40				
	Modo	Frecuencia en 3D (Hz)	Frecuencia con 0,2 mm (Hz)	Variación (%)
Flector	1	361,49	365,73	1,173
Flector	2	367,48	365,73	0,476
Flector	3	938,26	932,52	0,612
Flector	4	938,79	932,52	0,668
Flector	5	1653	1677,8	1,500
Flector	6	1685,6	1677,8	0,463
Flector	7	2553,2	2537,6	0,611
Flector	8	2556,6	2537,6	0,743
Flector	9	3423,9	3473,9	1,460
Flector	10	3496,5	3474	0,644
Flector	11	4494,4	4460,7	0,750
Flector	12	4501,1	4460,7	0,898
Torsor	1	1099,1	1103,2	0,373
Torsor	2	2182,3	2206	1,086
Torsor	3	3297,1	3309,6	0,379
Torsor	4	4361	4411,9	1,167
Torsor	5	5456,7	5483,1	0,484
Torsor	6	6523,4	6528,5	0,078
Longitudinal	1	1788,4	1778,9	0,531
Longitudinal	2	3551,5	3557,1	0,158
Longitudinal	3	5328,2	5336,6	0,158
Longitudinal	4	6980	7114,2	1,923
Longitudinal	5	8676	8661,8	0,164
Variación media				0,717

Tabla 48. Variación respecto al modelo 3D en la fisura A60

Variación con Fisura A60				
	Modo	Frecuencia en 3D (Hz)	Frecuencia con 0,2 mm (Hz)	Variación (%)
Flector	1	352,27	365,72	3,818
Flector	2	365,55	365,74	0,052
Flector	3	936,61	932,51	0,438
Flector	4	938,32	932,51	0,619
Flector	5	1605,6	1677,8	4,497
Flector	6	1675,1	1677,9	0,167
Flector	7	2545,5	2537,6	0,310
Flector	8	2553,8	2537,6	0,634
Flector	9	3300,5	3473,8	5,251
Flector	10	3479,1	3474	0,147
Flector	11	4484,9	4460,7	0,540
Flector	12	4493,9	4460,7	0,739
Torsor	1	1099,8	1103,2	0,309
Torsor	2	2157,2	2205,8	2,253
Torsor	3	3299,1	3309,6	0,318
Torsor	4	4297,2	4411,5	2,660
Torsor	5	5364,1	5483	2,217
Torsor	6	6397,2	6528,4	2,051
Longitudinal	1	1788,4	1778,9	0,531
Longitudinal	2	3542,5	3556,9	0,406
Longitudinal	3	5328,4	5336,6	0,154
Longitudinal	4	6835,1	7113,7	4,076
Longitudinal	5	8472,7	8661,7	2,231
Variación media				1,496

Tabla 49. Variación respecto al modelo 3D en la fisura A80

Variación con Fisura A80				
	Modo	Frecuencia en 3D (Hz)	Frecuencia con 0,2 mm (Hz)	Variación (%)
Flector	1	339,76	365,72	7,641
Flector	2	361,64	365,73	1,131
Flector	3	934,38	932,51	0,200
Flector	4	937,37	932,51	0,518
Flector	5	1545,2	1677,8	8,581
Flector	6	1654,3	1677,8	1,421
Flector	7	2532,3	2537,6	0,209
Flector	8	2547,2	2537,6	0,377
Flector	9	3299,1	3473,7	5,292
Flector	10	3445,7	3473,9	0,818
Flector	11	4473,8	4460,6	0,295
Flector	12	4475,8	4460,6	0,340
Torsor	1	1099,8	1103,2	0,309
Torsor	2	2110,2	2205,3	4,507
Torsor	3	3133,9	3309,6	5,606
Torsor	4	4172,1	4410,6	5,717
Torsor	5	5328,4	5482,9	2,900
Torsor	6	6170	6528,3	5,807
Longitudinal	1	1788,4	1778,9	0,531
Longitudinal	2	3533,3	3556,5	0,657
Longitudinal	3	5268,7	5336,6	1,289
Longitudinal	4	6636,8	7113	7,175
Longitudinal	5	8126,7	8661,6	6,582
Variación media				2,952

Tabla 50. Variación respecto al modelo 3D en la fisura A100

Variación con Fisura A100				
	Modo	Frecuencia en 3D (Hz)	Frecuencia con 0,2 mm (Hz)	Variación (%)
Flector	1	325,85	365,72	12,236
Flector	2	354,88	365,72	3,055
Flector	3	929,57	932,51	0,316
Flector	4	935,53	932,51	0,323
Flector	5	1481,9	1677,7	13,213
Flector	6	1620,2	1677,7	3,549
Flector	7	2511,5	2537,5	1,035
Flector	8	2534,2	2537,5	0,130
Flector	9	3299,1	3473,7	5,292
Flector	10	3393,4	3473,7	2,366
Flector	11	4438,6	4460,5	0,493
Flector	12	4458,1	4460,5	0,054
Torsor	1	1099,8	1103,2	0,309
Torsor	2	2031,3	2204,1	8,507
Torsor	3	2951,4	3309,6	12,137
Torsor	4	3974,6	4408,1	10,907
Torsor	5	5328,4	5482,9	2,900
Torsor	6	5871,1	6528,2	11,192
Longitudinal	1	1788,4	1778,9	0,531
Longitudinal	2	3520,2	3556	1,017
Longitudinal	3	5193,4	5336,6	2,757
Longitudinal	4	6573,5	7112	8,192
Longitudinal	5	7778,3	8661,3	11,352
Variación media				4,864

Tabla 51. Variación respecto al modelo 3D en la fisura B20

Variación con Fisura B20				
	Modo	Frecuencia en 3D (Hz)	Frecuencia con 0,2 mm (Hz)	Variación (%)
Flector	1	365,43	365,67	0,066
Flector	2	367,8	365,69	0,574
Flector	3	932,85	932,48	0,040
Flector	4	937,92	932,51	0,577
Flector	5	1680,7	1677,7	0,178
Flector	6	1688	1677,7	0,610
Flector	7	2546,9	2537,6	0,365
Flector	8	2554,6	2537,6	0,665
Flector	9	3491,9	3473,6	0,524
Flector	10	3499,4	3473,6	0,737
Flector	11	4492,5	4460,7	0,708
Flector	12	4497,5	4460,7	0,818
Torsor	1	1096,1	1103	0,630
Torsor	2	2192	2206,1	0,643
Torsor	3	3287,8	3309,1	0,648
Torsor	4	4383,1	4412,1	0,662
Torsor	5	5477,8	5482,7	0,089
Torsor	6	6571	6528,5	0,647
Longitudinal	1	1786,2	1778,6	0,425
Longitudinal	2	3563,7	3557,2	0,182
Longitudinal	3	5320,7	5335,8	0,284
Longitudinal	4	7047	7114,4	0,956
Longitudinal	5	8723,6	8661,9	0,707
Variación media				0,510

Tabla 52. Variación respecto al modelo 3D en la fisura B40

Variación con Fisura B40				
	Modo	Frecuencia en 3D (Hz)	Frecuencia con 0,2 mm (Hz)	Variación (%)
Flector	1	358,03	365,65	2,128
Flector	2	366,72	365,68	0,284
Flector	3	918,15	932,42	1,554
Flector	4	935,51	932,5	0,322
Flector	5	1659	1677,6	1,121
Flector	6	1683,9	1677,7	0,368
Flector	7	2525,8	2537,5	0,463
Flector	8	2548,3	2537,6	0,420
Flector	9	3465,4	3473,5	0,234
Flector	10	3490,6	3473,6	0,487
Flector	11	4474,4	4460,6	0,308
Flector	12	4486,6	4460,6	0,580
Torsor	1	1091,6	1103	1,044
Torsor	2	2182,9	2206	1,058
Torsor	3	3273,6	3309	1,081
Torsor	4	4362,7	4411,9	1,128
Torsor	5	5447,7	5482,5	0,639
Torsor	6	6526,3	6528,4	0,032
Longitudinal	1	1779,9	1778,5	0,079
Longitudinal	2	3554,2	3557,1	0,082
Longitudinal	3	5296	5335,6	0,748
Longitudinal	4	7016,9	7114,2	1,387
Longitudinal	5	8683	8661,8	0,244
Variación media				0,687

Tabla 53. Variación respecto al modelo 3D en la fisura B60

Variación con Fisura B60				
	Modo	Frecuencia en 3D (Hz)	Frecuencia con 0,2 mm (Hz)	Variación (%)
Flector	1	346,68	365,62	5,463
Flector	2	364,01	365,67	0,456
Flector	3	897,87	932,37	3,842
Flector	4	929,67	932,47	0,301
Flector	5	1627,7	1677,5	3,060
Flector	6	1674,3	1677,7	0,203
Flector	7	2501,9	2537,4	1,419
Flector	8	2534,3	2537,5	0,126
Flector	9	3427,2	3473,4	1,348
Flector	10	3472,7	3473,5	0,023
Flector	11	4453,4	4460,4	0,157
Flector	12	4468,9	4460,5	0,188
Torsor	1	1083,1	1102,9	1,828
Torsor	2	2165,3	2205,8	1,870
Torsor	3	3244,7	3308,6	1,969
Torsor	4	4317	4411,5	2,189
Torsor	5	5378,1	5482,4	1,939
Torsor	6	6434,4	6528,2	1,458
Longitudinal	1	1770,9	1778,4	0,424
Longitudinal	2	3541,6	3556,9	0,432
Longitudinal	3	5250,9	5335,3	1,607
Longitudinal	4	6958,9	7113,7	2,224
Longitudinal	5	8558,8	8661,5	1,200
Variación media				1,466

Tabla 54. Variación respecto al modelo 3D en la fisura B80

Variación con Fisura B80				
	Modo	Frecuencia en 3D (Hz)	Frecuencia con 0,2 mm (Hz)	Variación (%)
Flector	1	332,57	365,61	9,935
Flector	2	358,99	365,64	1,852
Flector	3	875,1	932,33	6,540
Flector	4	919,15	932,41	1,443
Flector	5	1589,4	1677,5	5,543
Flector	6	1657,3	1677,6	1,225
Flector	7	2478,7	2537,3	2,364
Flector	8	2510,5	2537,4	1,071
Flector	9	3378,4	3473,2	2,806
Flector	10	3446	3473,3	0,792
Flector	11	4428,2	4460,2	0,723
Flector	12	4448,6	4460,3	0,263
Torsor	1	1069,2	1102,6	3,124
Torsor	2	2135,2	2205,3	3,283
Torsor	3	3192,4	3307,9	3,618
Torsor	4	4233,4	4410,6	4,186
Torsor	5	5264,8	5482,2	4,129
Torsor	6	6301,9	6528	3,588
Longitudinal	1	1759,6	1778,3	1,063
Longitudinal	2	3524,3	3556,5	0,914
Longitudinal	3	5184,4	5334,8	2,901
Longitudinal	4	6862,1	7113	3,656
Longitudinal	5	8407,4	8661,2	3,019
Variación media				2,958

Tabla 55. Variación respecto al modelo 3D en la fisura B100

Variación con Fisura B100				
	Modo	Frecuencia en 3D (Hz)	Frecuencia con 0,2 mm (Hz)	Variación (%)
Flector	1	317,47	365,6	15,160
Flector	2	350,91	365,6	4,186
Flector	3	852,5	932,32	9,363
Flector	4	902,44	932,32	3,311
Flector	5	1545,5	1677,4	8,534
Flector	6	1630,4	1677,4	2,883
Flector	7	2456,6	2537,2	3,281
Flector	8	2474,8	2537,2	2,521
Flector	9	3319,3	3473,1	4,634
Flector	10	3413	3473,1	1,761
Flector	11	4393,1	4460	1,523
Flector	12	4425,9	4460	0,770
Torsor	1	1046,5	1102	5,303
Torsor	2	2084,7	2204,1	5,727
Torsor	3	3104,9	3306,1	6,480
Torsor	4	4111,4	4408,2	7,219
Torsor	5	5126,3	5481,9	6,937
Torsor	6	6160,5	6527,6	5,959
Longitudinal	1	1745,2	1778	1,879
Longitudinal	2	3496,7	3556	1,696
Longitudinal	3	5092,7	5334	4,738
Longitudinal	4	6718,9	7112,1	5,852
Longitudinal	5	8229,9	8660,7	5,235
Variación media				4,998

Como resultado final del problema actual se muestra la gráfica que describe la variación entre los dos tipos distintos de fisuras (A o B) en función de la profundidad de grieta.

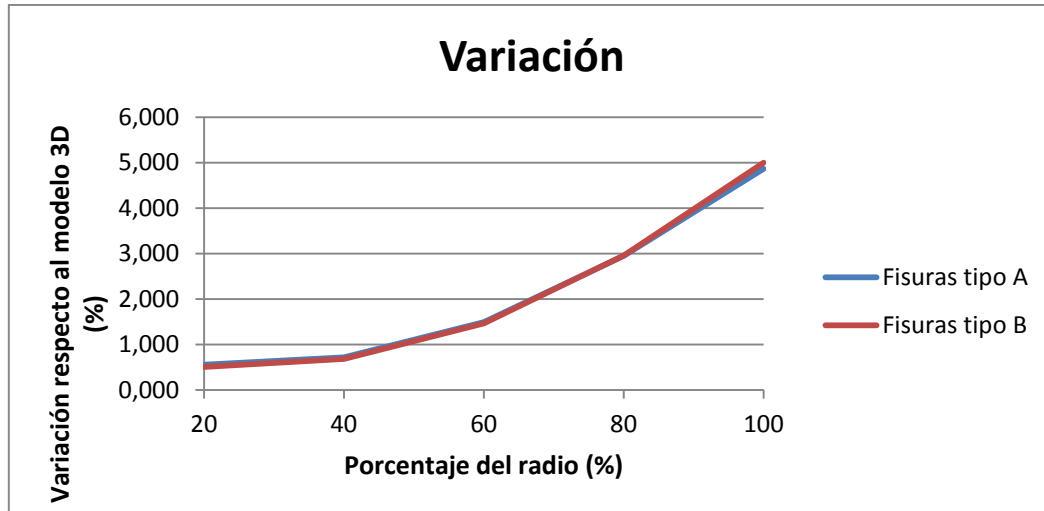


Figura 5.18 Comparación de la variación entre las fisuras A y las fisuras B

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

6.1 CONCLUSIONES

Llegados a este punto es el momento de obtener unas conclusiones claras que resuman los resultados que se han obtenido de cada uno de los problemas analizados en el documento. Para facilitar la comprensión de estas conclusiones se han dividido atendiendo a los dos problemas que se han estudiado, y dentro de cada uno se han diferenciado en función del tema al que afectan.

6.1.1 Conclusiones del primer problema

Como ya se ha explicado anteriormente el primer problema tenía como objetivo el analizar las vibraciones de un eje fisurado, y cuantificar la variación de dichas vibraciones en función de la fisura. Pero no solo eso, si no que también se buscaba diferenciar los resultados en función del tipo de modo que se analizara y estudiar la importancia de nodos y antinodos. Se pueden distinguir varias conclusiones, las cuales se muestran a continuación.

Variación de la frecuencia natural de vibración

Estudiando los resultados obtenidos en capítulos anteriores resulta obvio, tanto por los resultados como por propia intuición, que a medida que la profundidad o el tamaño de la fisura aumenta, también lo hace la variación respecto a la frecuencia de referencia (del eje sin fisura). Esto se debe, como ya se ha explicado anteriormente, a que debido a la presencia de fisuras el amortiguamiento, pero sobre todo la rigidez, varían.

Si se presta atención a los resultados, en la mayoría de ellos la frecuencia obtenida en los casos con fisura es menor a la del eje en perfectas condiciones. Esto se debe a una de las principales ecuaciones pertenecientes al estudio de las vibraciones:

$$F_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Gracias a la cual es posible calcular la frecuencia natural de un sistema resorte-masa no amortiguado en función de la rigidez (k) y la masa (m). Como se puede observar si la rigidez disminuye, como ocurre ante la presencia de fisuras, la frecuencia natural

también hace lo propio. También la masa se ve afectada y disminuye con la presencia de grietas, pero ésta lo hace de una manera casi imperceptible, por lo tanto no llega a afectar a la frecuencia natural.

Importancia de nodos y antinodos

Si se recuerdan algunos conceptos previos de este proyecto, un nodo es un punto que permanece inmóvil durante la vibración del sistema al que pertenece. Al contrario, un antinodo es el punto o uno de los puntos que alcanza la amplitud máxima durante la vibración del sistema.

Atendiendo a estas definiciones resulta necesario volver a los resultados y analizar si afecta la situación de estos nodos y antinodos en los distintos modos, pero primero se debe analizar la situación de nodos y antinodos en función de los modos y situación de las fisuras estudiadas, tal y como se muestra en la Tabla 56.

Tabla 56. Distinción entre nodos y antinodos en las fisuras A y B

	Modos	Fisura tipo A	Fisura tipo B
Flectores	1	Antinodo	Nodo
	2	Antinodo	
	3	Nodo	
	4	Nodo	
	5	Antinodo	
	6	Antinodo	
	7	Nodo	
	8	Nodo	
	9	Antinodo	
	10	Antinodo	
	11	Nodo	
	12	Nodo	
Torsores	1	Antinodo	Nodo
	2	Nodo	
	3	Antinodo	
	4	Nodo	
	5	Antinodo	
	6	Nodo	
Longitudinales	1	Intermedio	Nodo
	2	Nodo	Nodo
	3	Intermedio	Nodo
	4	Nodo	Intermedio
	5	Intermedio	Intermedio

Si observamos la tabla anterior junto con los resultados del primer problema se puede llegar a varias conclusiones. La primera de todas y la más obvia es que sí que importa y mucho la situación de nodos y antinodos. En la mayoría de análisis realizados si la fisura se encuentra en una zona predominada por antinodos la variación de la frecuencia es mucho mayor, sobre todo en los modos de vibración flectores. Hay casos especiales, los cuales serán estudiados con detenimiento posteriormente, en los cuales la variación no sigue el mismo patrón, y se aprecia una mayor desviación en zonas con predominio de nodos, pero como ya se ha explicado, estos casos son menores.

Un ejemplo claro de esta mayor variación en zonas con nodos se da en los momentos flectores, más precisamente en los modos de la fisura A: 1, 2, 5, 6, 9 y 10. Especialmente en los modos 1, 5 y 9 esta variación es mucho mayor. Esto se debe a que estos modos flectan de forma que la zona de la fisura se encuentra en un antinodo y se abre, variando así mucho más la geometría natural del eje. Por el contrario, los modos 2, 6 y 10 son iguales que los anteriores, pero flectan en otra dirección, esto provoca que la fisura no se “abra” tanto y esto no afecte de la misma manera a la frecuencia natural. En la Figura 6.1 se muestra el modo flector número 5 con fisura A100, en ella se puede observar como varía de forma brusca la geometría inicial del eje al abrirse la fisura.

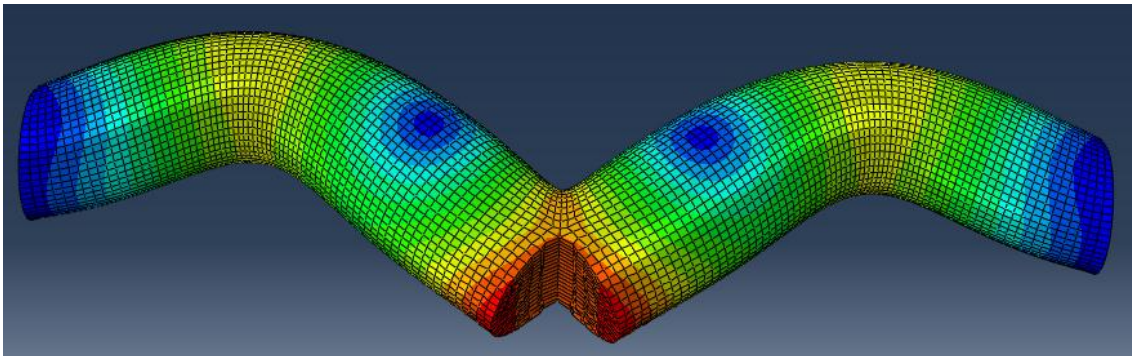


Figura 6.1 Variación de la geometría por fisura A100

Distinción entre modos flectores, torsores y longitudinales

- Modos flectores

Como ya se ha explicado en el apartado anterior, la variación en este tipo de modos es mayor que en el resto de manera considerable. Esto se debe a lo ya nombrado, y es que en los modos flectores es en los que la geometría varía de una manera más brusca

respecto a la geometría inicial. El eje flexa de una forma que hace que la fisura se abra, al contrario que en el resto de modos.

Para las fisuras situadas en la zona A este modo es el perfecto para su detección, ya que en los modos en los que la zona central es antinodo tienen una mayor variación, como ya se ha visto.

En cuanto a las fisuras en la zona B ocurre lo contrario. Se detecta mejor la fisura en los primeros modos. Como se muestra en la Tabla 56 la zona de la fisura B es siempre nodo en los modos flectores, ya que se encuentra cerca de un empotramiento. Lo que ocurre es que esta fisura es detectada en los modos en los que se encuentra en la zona exterior de la oscilación, como se muestra en la Figura 6.2. Al igual que en las fisuras de la zona A la geometría del eje sufre un cambio brusco al abrirse la fisura, por lo tanto disminuye la rigidez y con ello la frecuencia. A medida que el número de modo aumenta, el giro en la zona de la fisura es menor, por ello se detectan peor las fisuras de la zona B en los modos más elevados.

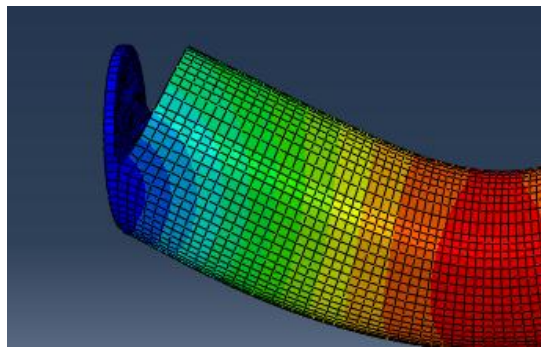


Figura 6.2 Fisura B en modo 3

- Modos torsores

En cuanto a los modos torsores, son en los que peor se detecta la fisura A, ligeramente por debajo de los longitudinales. Aunque en la fisura tipo B dan un mejor resultado que los longitudinales. En referencia a estos modos se debe decir que no siguen ningún patrón fijo, es decir, no se detecta ningún modo que destaque sobre el resto en todas las fisuras. Esto se debe a que en estos modos es en los que la geometría del eje se ve en menor medida afectada, por la forma de la fisura (transversal) y la torsión que sufre el cilindro, respecto a su eje.

En referencia a la situación de la fisura, hay que detallar que las fisuras situadas en la zona A se detectan mejor que las de la zona B. Esto se debe a que la zona B está

siempre compuesta por nodos, y además se retuerce menos que la zona A, provocando ésto último que su geometría se vea muy poco afectada, menos incluso que la de la zona A.

- Longitudinales

Al igual que los modos torsores no siguen un patrón fijo, ya que no se diferencian de una manera clara los nodos o antinodos.

La única conclusión clara que se puede obtener es que en fisuras grandes situadas en la zona A las frecuencias sufren una gran variación en modos altos, debido a que la forma de vibración afecta y mucho a la geometría de la fisura, ya que las dos son transversales al eje.

En cuanto a las fisuras de la zona B no siguen ningún patrón concreto y su variación es menor que en las de la zona A.

➤ Debido a la gran cantidad de conclusiones que se han obtenido, resulta necesario recalcar los puntos más importantes de todas ellas:

- ✓ En cuanto a nodos y antinodos, como cabía esperar, se detectan mejor las fisuras que se encuentran en zonas con mayoría de antinodos. Esto se debe principalmente a que al ser un antinodo esa zona sufre una mayor oscilación durante la vibración, provocando una mayor variación de la geometría y con ello de la frecuencia.
- ✓ En referencia al tipo de vibración, las vibraciones flectoras son las que han aportado mejores resultados. Parece obvio que el variar de una manera más brusca la forma del eje y conseguir que la fisura se abra provoca la variación que se ha observado en los resultados.
- ✓ La zona en la que se encuentre la fisura parece no reflejar grandes variaciones, ya que en algunos modos varían más las frecuencias de la fisura A, y en otros las fisuras de la zona B.

6.1.2 Conclusiones del segundo problema

Atendiendo al primer capítulo de este documento, los objetivos que se perseguían, en cuanto al segundo problema se refiere, consistían en estudiar si los resultados convergían a medida que se disminuye la longitud de la sección fisurada, y

en caso de que convergieran, cuantificar la variación existente entre el modelo unidimensional y el modelo tridimensional para cada una de las fisuras.

Teniendo en cuenta esos objetivos se pueden expresar las siguientes conclusiones:

Convergencia de resultados

El resultado que se ha obtenido en cuanto a la convergencia es que las frecuencias tienden a estabilizarse a medida que la longitud de la sección se aproxima a cero. Esto probablemente se deba al tipo de fisura que el software Abaqus/CAE genera en el eje, ya que en sí no es una fisura, más bien se trata de una discontinuidad infinitesimal en el eje. Es decir, la longitud de la fisura en el modelo 3D sería de 0 mm, por eso a medida que la grieta en el modelo unidimensional se aproxima a este valor los resultados convergen.

También se puede apreciar que en los modos torsores la convergencia es más brusca que en el resto de modos, ya que en éstos existe una mayor diferencia entre el valor de la frecuencia correspondiente a 16 mm y el valor correspondiente a 0,2 mm.

Como ya se explicó en capítulos anteriores la convergencia en algunos modos se alcanza en longitudes mayores a 0,2 mm, pero para obtener y visualizar de una manera más sencilla los resultados se ha calculado la variación definitiva respecto a la longitud de 0,2 mm.

Variación entre el modelo 3D y el modelo unidimensional

Como se ha podido observar en el Apartado 5.3 *Resultados* la variación que se ha conseguido con este modelo ha sido muy positiva, llegando como máximo a alcanzar unos valores en torno al 5% en las fisuras de mayor profundidad.

Se podría llegar a la suposición errónea de que cuanto más grande sea una fisura más fácil es de conseguir un eje unidimensional equivalente, pero como ha quedado reflejado es al contrario. Si la fisura tiene una profundidad del 20% del radio se consiguen resultados que difieren del original en torno a un 0,5%, mientras que para fisuras más grandes la variación es mayor.

Un dato interesante que se puede extraer de los resultados es que en este caso la situación de la fisura no influye para nada en la equivalencia que se pueda llegar a conseguir. Como queda reflejado en la Figura 5.18 las variaciones son prácticamente idénticas, sin influir si la fisura se encuentra en la zona central o por el contrario en el extremo del eje.

En cuanto a si existen diferencias relevantes en función de los modos la respuesta es negativa, ya que no se aprecia un patrón claro que implique que en uno u otro modo se consiga una variación inferior o superior al resto.

Como última conclusión hay que mencionar la diferencia de tiempos de análisis en los dos problemas. Se ha realizado el análisis de la fisura A100 para los dos modelos, y el tiempo de cada análisis se muestra en la Tabla 57.

Tabla 57. Tiempos de análisis para la fisura A100

Tiempo de análisis en el modelo tridimensional	Tiempo de análisis en el modelo unidimensional
19 min. 20 seg.	25 seg.

Como se puede observar el tiempo crece de manera desproporcionada en el modelo tridimensional, mientras que la variación media para este tipo de fisura tan solo es del 4,864%. Por lo tanto con el modelo unidimensional se pueden conseguir muy buenos resultados en un tiempo muy inferior al del modelo en 3D.

6.2 TRABAJOS FUTUROS

Como sucede en la mayoría de trabajos, por no decir en todos, siempre se puede mejorar de alguna forma uno o muchos aspectos. Por esta razón se plantean en este apartado una serie de mejoras y trabajos futuros. Mediante cada una de estas pequeñas aportaciones se conseguiría llegar a un análisis muy completo y extenso de los ejes ferroviarios. A continuación se formulan una serie de propuestas que se han creído convenientes durante la creación de este documento.

- En primer lugar se plantea la posibilidad de profundizar más en el análisis modal de ejes ferroviarios. Esto supondría el estudio de otro tipo de fisuras, de frente elíptico, frente circular, frente triangular o fisuras más pequeñas, más cercanas a la realidad. Otros estudios que resultarían interesantes supondrían el análisis del eje completo, sin simplificaciones, aunque esto resultaría muy complicado para el problema del eje equivalente, por la cantidad de secciones que componen el eje. También se podría contemplar la posibilidad de colocar las fisuras en otras zonas, por ejemplo en cambios de sección para el caso del eje sin simplificar.
- Debido al aumento de las líneas de alta velocidad y de sus respectivos ejes huecos también resultaría interesante su estudio, ya que éstos al estar formados por menos material son más sensibles a la aparición de grietas y probablemente a la variación de sus frecuencias.
- Atendiendo a la realidad, lo ideal sería poder analizar los ejes con sus respectivas ruedas montadas, es decir, analizar el wheelset completo, ya que en un futuro es lo que se desea con vistas a disminuir el tiempo de ensayo. Por esta razón a éste también se le considera un trabajo futuro muy positivo.
- Otra posibilidad que se plantea es la realización de un análisis parecido al llevado a cabo en este proyecto pero con otro tipo de herramientas de elementos finitos. Por ejemplo se propone el uso de programas como Ansys, Nastran, Catia, etc. para así comprobar las diferencias que puedan surgir, tanto a la hora de generar el problema como a los resultados obtenidos.

CAPÍTULO 7

PRESUPUESTO

7.1 PRESUPUESTO

Se expone a continuación un pequeño desglose de las actividades, equipos y personal que han sido utilizados o han colaborado en la realización de este proyecto, con objeto de ofrecer un presupuesto sencillo que pueda servir como indicador del coste total del proyecto. El desglose de costes se ha dividido en dos grupos:

- Equipos: Se estima la amortización del conjunto de equipos utilizados para la realización del proyecto: PC y licencia del software Abaqus/CAE.
- Personal: Estimación del coste de todo el personal que ha intervenido en el proyecto. En este caso, como Ingeniero Senior, el tutor del proyecto, D. David Mauricio Alba Lucero; y como Graduado en Ingeniería Mecánica, el autor del proyecto, Miguel Marco Esteban.

Presupuesto del proyecto

Gastos informáticos

Licencias del software Abaqus/CAE 6.10-1:	6.000€
Ordenador Intel Core i5, 2.4 GHz:	700€

Mano de obra

Ingeniero Senior (40 €/hora x 30 horas):	1.200€
Graduado en Ingeniería (20 €/hora x 160 horas):	3.200€

TOTAL	11.100€
--------------	----------------

CAPÍTULO 8

BIBLIOGRAFÍA

8.1 LIBROS Y PUBLICACIONES

- [1]. N. Bachschmid, P Pennacchi y E. Tanzi. ***Cracked Rotors***. 1ª Edición. Springer Verlag, Berlín, 2010.
- [2]. Singiresu S. Rao, Purdue University. ***Mechanical Vibrations***. 3ª Edición. Prentice Hall. EEUU, 1995.
- [3]. Ortiz Berrocal, Luis. ***Elasticidad***. 3ª Edición. MC.GRAW-HILL / INTERAMERICANA DE ESPAÑA. Madrid, 1998.
- [4]. S. Timoshenko. ***Resistencia de Materiales***. 5ª Edición. PARANINFO. Madrid, 2004.
- [5]. Hunter, Lemna y Nath, Robert. Artículo ***Process Compensated Resonant Testing***. Vibrant Corporation y Magnaflux Quasar.
- [6]. SIMULIA. ***Abaqus/CAE User's Manual***. 2010.
- [7]. Rubio Ruiz de Aguirre, María Lourdes. Documentación de la asignatura ***Vibraciones*** (Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad Carlos III de Madrid, Leganés).
- [8]. López Boada, Beatriz. Documentación de la asignatura ***Ingeniería Ferroviaria*** (Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad Carlos III de Madrid, Leganés).
- [9]. García Prada, Juan Carlos y Álvarez Rodríguez, Julio. Documentación de la asignatura ***Mantenimiento y Diagnóstico de Máquinas*** (Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad Carlos III de Madrid, Leganés).
- [10]. Sección D 6.1 ***Development of compensated resonance inspection prototype for Wheel sets***. Título del Proyecto: “Wheel set integrated design and effective maintenance”. (WIDEM) Junio 2008.
- [11]. Norma UNE-EN 13261:2009. ***Aplicaciones ferroviarias. Ejes montados y bogies. Ejes. Requisitos de producto***. Diciembre 2009.
- [12]. Argüelles Íñiguez, Antonio. ***Análisis modal de un eje ferroviario mediante Pro/ENGINEER***. Proyecto fin de carrera. Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid. Leganés, 2012.

[13]. Ruiz Ayuso, María. *Estudio del comportamiento a flexión de ejes con fisuras de frente semielíptico*. Proyecto fin de carrera. Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid. Leganés, 2010.

8.2 DOCUMENTOS ELECTRÓNICOS O SITIOS WEB

[14]. [http:// www.vialibre-ffe.com](http://www.vialibre-ffe.com) (última visita Agosto 2012)

[15]. <http://www.efunda.com> (última visita Agosto 2012)

CAPÍTULO 9

ANEXOS

ANEXO A. RESULTADOS DE EJE EQUIVALENTE MEDIANTE SECCIONES

Fisura A20			0,2mm	0,4mm	0,6mm	0,8 mm	1mm	1,2mm	1,4mm	1,6 mm	1,8mm	2mm	4mm	8mm	16mm
	Modo	Frecuencia 3D	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia
Flector	1	366,5	365,74	365,8	365,85	365,91	365,96	366,02	366,08	366,13	366,19	366,24	366,8	367,92	370,21
Flector	2	367,86	365,75	365,81	365,87	365,93	365,99	366,05	366,12	366,18	366,24	366,3	366,91	368,15	370,66
Flector	3	938,15	932,52	932,52	932,53	932,54	932,54	932,55	932,56	932,56	932,57	932,57	932,64	932,76	933,01
Flector	4	938,33	932,52	932,52	932,53	932,54	932,54	932,55	932,56	932,56	932,57	932,57	932,64	932,76	933,01
Flector	5	1680,6	1677,9	1678,1	1678,2	1678,4	1678,6	1678,7	1678,9	1679,1	1679,2	1679,4	1681,1	1684,5	1691,6
Flector	6	1688,3	1677,9	1678,1	1678,3	1678,5	1678,7	1678,9	1679,1	1679,3	1679,5	1679,7	1681,7	1685,7	1694
Flector	7	2555,2	2537,6	2537,7	2537,7	2537,7	2537,7	2537,8	2537,8	2537,8	2537,9	2537,9	2538,2	2538,8	2540
Flector	8	2556	2537,6	2537,7	2537,7	2537,7	2537,7	2537,8	2537,8	2537,8	2537,9	2537,9	2538,2	2538,8	2540
Flector	9	3486,6	3474	3474,3	3474,7	3475,1	3475,4	3475,8	3476,1	3476,5	3476,9	3477,2	3480,9	3488,4	3503,8
Flector	10	3500,8	3474	3474,4	3474,8	3475,3	3475,7	3476,1	3476,5	3476,9	3477,3	3477,7	3481,9	3490,4	3507,7
Flector	11	4498,6	4460,7	4460,8	4460,9	4460,9	4461	4461,1	4461,1	4461,2	4461,3	4461,3	4462	4463,4	4466,1
Flector	12	4500,6	4460,7	4460,8	4460,9	4460,9	4461	4461,1	4461,1	4461,2	4461,3	4461,3	4462	4463,4	4466,2
Torsor	1	1097,2	1103,2	1103,3	1103,5	1103,7	1103,8	1104	1104,1	1104,3	1104,4	1104,6	1106,1	1109,1	1115,3
Torsor	2	2191,2	2206,1	2206	2206	2206	2206	2205,9	2205,9	2205,6	2205,9	2205,8	2205,6	2205,1	2204,1
Torsor	3	3291	3309,6	3310	3310,5	3311	3311,4	3311,9	3312,3	3312,8	3313,2	3313,7	3318,3	3327,4	3346
Torsor	4	4381,2	4412,1	4412,1	4412	4412	4411,9	4411,9	4411,8	4411,8	4411,7	4411,7	4411,2	4410,2	4408,3
Torsor	5	5483,4	5483,2	5483,8	5484,4	5485	5485,5	5486,1	5486,7	5487,3	5487,9	5488,5	5494,4	5506,3	5531,1
Torsor	6	6568	6528,6	6528,7	6528,8	6528,9	6529	6529,1	6529,2	6529,3	6529,4	6529,5	6530,5	6532,6	6537
Longitudinal	1	1788,4	1778,9	1779,1	1779,3	1779,6	1779,8	1780,1	1780,3	1780,6	1780,8	1781,1	1783,5	1788,4	1798,4
Longitudinal	2	3562,4	3557,2	3557,2	3557,1	3557,1	3557,1	3557	3557	3557	3556,9	3556,9	3556,5	3556	3555
Longitudinal	3	5327,7	5336,6	5337,3	5338	5338,8	5339,5	5340,2	5341	5341,7	5342,4	5343,2	5350,5	5365,3	5395,2
Longitudinal	4	7043	7114,4	7114,3	7114,2	7114,2	7114,1	7114,1	7114	7113,9	7113,9	7113,8	7113,2	7112	7109,8
Longitudinal	5	8734,3	8661,9	8662,1	8662,2	8662,3	8662,5	8662,6	8662,8	8662,9	8663,1	8663,2	8664,6	8667,4	8673,3

Fisura A40		0,2mm	0,4mm	0,6mm	0,8 mm	1mm	1,2mm	1,4mm	1,6 mm	1,8mm	2mm	4mm	8mm	16mm
Modo Frecuencia 3D		Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia
Flector	1	361,49	365,73	365,78	365,82	365,87	365,91	366	366,05	366,09	366,14	366,59	367,52	369,41
Flector	2	367,48	365,73	365,81	365,86	365,92	365,98	366,1	366,16	366,22	366,28	366,87	368,06	370,49
Flector	3	938,26	932,52	932,52	932,53	932,53	932,54	932,55	932,55	932,55	932,56	932,61	932,7	932,89
Flector	4	938,79	932,52	932,52	932,53	932,53	932,54	932,55	932,55	932,55	932,56	932,61	932,7	932,9
Flector	5	1653	1677,8	1677,9	1678,1	1678,2	1678,3	1678,5	1678,6	1678,7	1678,8	1680	1682,3	1687,3
Flector	6	1685,6	1677,8	1678,1	1678,3	1678,5	1678,7	1679	1679,2	1679,4	1679,6	1681,5	1685,3	1693,1
Flector	7	2553,2	2537,6	2537,6	2537,7	2537,7	2537,7	2537,7	2537,8	2537,8	2537,8	2538	2538,4	2539,2
Flector	8	2556,6	2537,6	2537,6	2537,7	2537,7	2537,7	2537,7	2537,8	2537,8	2537,8	2538	2538,4	2539,2
Flector	9	3423,9	3473,9	3474,2	3474,4	3474,7	3475	3475,5	3475,8	3476	3476,3	3479	3484,4	3494,6
Flector	10	3496,5	3474	3474,4	3474,8	3475,2	3475,6	3476,4	3476,8	3477,2	3477,6	3481,5	3489,6	3506,2
Flector	11	4494,4	4460,7	4460,8	4460,8	4460,8	4460,9	4461	4461	4461,1	4461,1	4461,5	4462,4	4464,1
Flector	12	4501,1	4460,7	4460,8	4460,8	4460,8	4460,9	4461	4461	4461,1	4461,1	4461,5	4462,4	4464,1
Torsor	1	1099,1	1103,2	1103,3	1103,5	1103,7	1103,8	1104	1104,3	1104,4	1104,6	1106,1	1109,1	1115,3
Torsor	2	2182,3	2206	2205,8	2205,7	2205,6	2205,5	2204,1	2205,1	2205	2204,9	2203,6	2201,2	2196,3
Torsor	3	3297,1	3309,6	3310	3310,5	3311	3311,4	3311,9	3312,8	3313,2	3313,7	3318,3	3327,4	3346
Torsor	4	4361	4411,9	4411,7	4411,4	4411,2	4411	4408,2	4410,5	4410,2	4409,7	4407,3	4402,4	4392,9
Torsor	5	5456,7	5483,1	5483,6	5484	5484,5	5485	5484,8	5485,9	5486,4	5487,3	5492,1	5501,9	5522,6
Torsor	6	6523,4	6528,5	6528,6	6528,6	6528,7	6528,7	6528,8	6528,9	6529	6529	6529,6	6530,7	6533,1
Longitudinal	1	1788,4	1778,9	1779,1	1779,3	1779,6	1779,8	1780,1	1780,3	1780,6	1781,1	1783,5	1788,4	1798,4
Longitudinal	2	3551,5	3557,1	3556,9	3556,8	3556,7	3556,5	3556,3	3556,1	3556	3555,9	3554,6	3552,3	3549,2
Longitudinal	3	5328,2	5336,6	5337,3	5338	5338,8	5339,5	5340,2	5341	5341,7	5343,2	5350,5	5365,3	5395,2
Longitudinal	4	6980	7114,2	7113,9	7113,6	7113,3	7113,1	7112,6	7112,5	7112,2	7111,7	7108,9	7103,5	7092,8
Longitudinal	5	8676	8661,8	8661,9	8662	8662,1	8662,1	8662,2	8662,3	8662,4	8662,5	8663,2	8664,5	8667,4

Fisura A60		0,2mm	0,4mm	0,6mm	0,8 mm	1mm	1,2mm	1,4mm	1,6 mm	1,8mm	2mm	4mm	8mm	16mm
Modo Frecuencia 3D		Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia
Flector	1	352,27	365,72	365,76	365,79	365,83	365,86	365,9	365,93	366,01	366,04	366,4	367,13	368,66
Flector	2	365,55	365,74	365,8	365,85	365,9	365,96	366,01	366,07	366,12	366,23	366,78	367,87	370,11
Flector	3	936,61	932,51	932,52	932,52	932,52	932,52	932,53	932,53	932,53	932,54	932,56	932,61	932,71
Flector	4	938,32	932,51	932,52	932,52	932,52	932,52	932,53	932,53	932,53	932,54	932,56	932,61	932,72
Flector	5	1605,6	1677,8	1677,8	1677,9	1677,9	1678	1678,1	1678,2	1678,2	1678,3	1678,9	1680,2	1683,4
Flector	6	1675,1	1677,9	1678	1678,2	1678,4	1678,5	1678,7	1678,8	1679	1679,3	1680,9	1684,2	1691,1
Flector	7	2545,5	2537,6	2537,6	2537,6	2537,6	2537,6	2537,6	2537,6	2537,6	2537,6	2537,7	2537,8	2538
Flector	8	2553,8	2537,6	2537,6	2537,6	2537,6	2537,6	2537,6	2537,6	2537,6	2537,6	2537,7	2537,8	2538
Flector	9	3300,5	3473,8	3474	3474,2	3474,3	3474,5	3474,7	3474,9	3475	3475,4	3477	3479,4	3480,4
Flector	10	3479,1	3474	3474,3	3474,7	3475	3475,4	3475,7	3476,1	3476,4	3477,1	3480,7	3488	3503,1
Flector	11	4484,9	4460,7	4460,7	4460,7	4460,7	4460,7	4460,7	4460,7	4460,7	4460,7	4460,7	4460,8	4461
Flector	12	4493,9	4460,7	4460,7	4460,7	4460,7	4460,7	4460,7	4460,7	4460,7	4460,7	4460,7	4460,8	4461
Torsor	1	1099,8	1103,2	1103,3	1103,5	1103,7	1103,8	1104	1104,1	1104,3	1104,6	1106,1	1109,1	1115,3
Torsor	2	2157,2	2205,8	2205,4	2205,1	2204,8	2204,4	2204,1	2203,8	2203,4	2202,8	2199,5	2192,9	2179,9
Torsor	3	3299,1	3309,6	3310	3310,5	3311	3311,4	3311,9	3312,3	3312,8	3313,7	3318,3	3327,4	3346
Torsor	4	4297,2	4411,5	4410,9	4410,2	4409,5	4408,9	4408,2	4407,5	4406,9	4405,5	4398,9	4385,8	4360,3
Torsor	5	5364,1	5483	5483,3	5483,7	5484	5484,4	5484,8	5485,1	5485,5	5486,2	5489,9	5497,6	5514,6
Torsor	6	6397,2	6528,4	6528,4	6528,4	6528,4	6528,4	6528,4	6528,4	6528,3	6528,3	6528,1	6527,8	6527,1
Longitudinal	1	1788,4	1778,9	1779,1	1779,3	1779,6	1779,8	1780,1	1780,3	1780,6	1781,1	1783,5	1788,4	1798,4
Longitudinal	2	3542,5	3556,9	3556,5	3556,2	3555,8	3555,5	3555,1	3554,8	3554,5	3553,8	3550,7	3545,6	3541,1
Longitudinal	3	5328,4	5336,6	5337,3	5338	5338,8	5339,5	5340,2	5341	5341,7	5343,2	5350,5	5365,3	5395,2
Longitudinal	4	6835,1	7113,7	7113	7112,3	7111,6	7110,9	7110,2	7109,5	7108,8	7108	7100,2	7086,2	7059
Longitudinal	5	8472,7	8661,7	8661,7	8661,7	8661,6	8661,6	8661,5	8661,5	8661,4	8661,4	8660,9	8659,9	8657,9

Fisura A80			0,2mm	0,4mm	0,6mm	0,8 mm	1mm	1,2mm	1,4mm	1,6 mm	1,8mm	2mm	4mm	8mm	16mm
	Modo	Frecuencia 3D	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia
Flector	1	339,76	365,72	365,75	365,78	365,81	365,84	365,87	365,9	365,93	365,96	365,99	366,3	366,93	368,29
Flector	2	361,64	365,73	365,78	365,82	365,87	365,91	365,96	366,01	366,05	366,1	366,14	366,6	367,53	369,43
Flector	3	934,38	932,51	932,51	932,51	932,51	932,51	932,51	932,51	932,5	932,5	932,5	932,49	932,48	932,44
Flector	4	937,37	932,51	932,51	932,51	932,51	932,51	932,51	932,51	932,5	932,5	932,5	932,49	932,48	932,44
Flector	5	1545,2	1677,8	1677,8	1677,8	1677,8	1677,9	1677,9	1677,9	1678	1678	1678	1678,4	1679,2	1681,3
Flector	6	1654,3	1677,8	1677,9	1678,1	1678,2	1678,3	1678,4	1678,5	1678,6	1678,7	1678,8	1680	1682,4	1687,5
Flector	7	2532,3	2537,6	2537,6	2537,5	2537,5	2537,5	2537,5	2537,5	2537,5	2537,4	2537,4	2537,2	2536,9	2536,2
Flector	8	2547,2	2537,6	2537,6	2537,5	2537,5	2537,5	2537,5	2537,5	2537,5	2537,4	2537,4	2537,2	2536,9	2536,2
Flector	9	3299,1	3473,7	3473,9	3474	3474,1	3474,2	3474,4	3474,5	3474,6	3474,7	3474,8	3475,3	3473,9	3460
Flector	10	3445,7	3473,9	3474,2	3474,4	3474,7	3475	3475,3	3475,5	3475,8	3476,1	3476,4	3479,2	3485,1	3497,5
Flector	11	4473,8	4460,6	4460,6	4460,5	4460,5	4460,4	4460,3	4460,3	4460,2	4460,2	4460,1	4459,6	4458,5	4456,2
Flector	12	4475,8	4460,6	4460,6	4460,5	4460,5	4460,4	4460,3	4460,3	4460,2	4460,2	4460,1	4459,6	4458,5	4456,2
Torsor	1	1099,8	1103,2	1103,3	1103,5	1103,7	1103,8	1104	1104,1	1104,3	1104,4	1104,6	1106,1	1109,1	1115,3
Torsor	2	2110,2	2205,3	2204,5	2203,7	2202,9	2202,1	2201,3	2200,5	2199,7	2198,9	2198,1	2190,2	2174,5	2144,1
Torsor	3	3133,9	3309,6	3310	3310,5	3311	3311,4	3311,9	3312,3	3312,8	3313,2	3313,7	3318,3	3327,4	3346
Torsor	4	4172,1	4410,6	4409	4407,4	4405,8	4404,2	4402,6	4401	4399,4	4397,8	4396,2	4380,3	4349,3	4290,5
Torsor	5	5328,4	5482,9	5483,2	5483,5	5483,8	5484,1	5484,4	5484,7	5485	5485,3	5485,6	5488,7	5495,3	5510,3
Torsor	6	6170	6528,3	6528,2	6528,1	6528	6527,8	6527,7	6527,6	6527,5	6527,3	6527,2	6525,9	6523,3	6441,4
Longitudinal	1	1788,4	1778,9	1779,1	1779,3	1779,6	1779,8	1780,1	1780,3	1780,6	1780,8	1781,1	1783,5	1788,4	1798,4
Longitudinal	2	3533,3	3556,5	3555,8	3555,1	3554,4	3553,8	3553,1	3552,4	3551,8	3551,1	3550,5	3544,6	3536	3532,6
Longitudinal	3	5268,7	5336,6	5337,3	5338	5338,8	5339,5	5340,2	5341	5341,7	5342,4	5343,2	5350,5	5365,3	5395,2
Longitudinal	4	6636,8	7113	7111,6	7110,2	7108,8	7107,4	7106	7104,5	7103,1	7101,7	7100,3	7086,3	7058,6	7006,2
Longitudinal	5	8126,7	8661,6	8661,4	8661,2	8661	8660,8	8660,6	8660,3	8660,1	8659,9	8659,7	8657,5	8653	8598,2

Fisura A100			0,2mm	0,4mm	0,6mm	0,8 mm	1mm	1,2mm	1,4mm	1,6 mm	1,8mm	2mm	4mm	8mm	16mm
	Modo	Frecuencia 3D	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia
Flector	1	325,85	365,72	365,75	365,78	365,8	365,83	365,86	365,89	365,92	365,95	365,98	366,28	366,89	368,18
Flector	2	354,88	365,72	365,75	365,78	365,8	365,83	365,86	365,89	365,92	365,95	365,98	366,28	366,91	368,25
Flector	3	929,57	932,51	932,5	932,49	932,49	932,48	932,47	932,47	932,46	932,46	932,45	932,39	932,26	932,02
Flector	4	935,53	932,51	932,5	932,49	932,49	932,48	932,47	932,47	932,46	932,46	932,45	932,39	932,26	932,02
Flector	5	1481,9	1677,7	1677,8	1677,8	1677,8	1677,8	1677,9	1677,9	1677,9	1677,9	1678	1678,3	1679	1680,9
Flector	6	1620,2	1677,7	1677,8	1677,8	1677,8	1677,8	1677,9	1677,9	1677,9	1677,9	1678	1678,3	1679	1681
Flector	7	2511,5	2597,5	2597,5	2597,4	2597,4	2597,3	2597,3	2597,2	2597,2	2597,1	2597,1	2596,5	2595,4	2593,3
Flector	8	2534,2	2597,5	2597,5	2597,4	2597,4	2597,3	2597,3	2597,2	2597,2	2597,1	2597,1	2596,5	2595,4	2593,3
Flector	9	3299,1	3473,7	3473,9	3474	3474,1	3474,2	3474,2	3474,3	3474,4	3474,4	3474,4	3473,9	3466,8	3431,7
Flector	10	3393,4	3473,7	3473,9	3474	3474,1	3474,3	3474,4	3474,6	3474,7	3474,8	3475	3476,4	3479,7	3487,4
Flector	11	4438,6	4460,5	4460,4	4460,2	4460,1	4459,9	4459,8	4459,7	4459,5	4459,4	4459,2	4457,7	4454,8	4448,7
Flector	12	4458,1	4460,5	4460,4	4460,2	4460,1	4459,9	4459,8	4459,7	4459,5	4459,4	4459,2	4457,7	4454,8	4448,7
Torsor	1	1099,8	1103,2	1103,3	1103,5	1103,7	1103,8	1104	1104,1	1104,3	1104,4	1104,6	1106,1	1109,1	1115,3
Torsor	2	2031,3	2204,1	2202,1	2200	2198	2196	2194	2192	2190	2188	2186	2166,4	2128,4	2058,4
Torsor	3	2951,4	3309,6	3310	3310,5	3311	3311,4	3311,9	3312,3	3312,8	3313,2	3313,7	3318,3	3327,4	3346
Torsor	4	3974,6	4408,1	4404,1	4400,1	4396	4392	4388	4384	4380,1	4376,1	4372,1	4333,1	4259,6	4133,7
Torsor	5	5328,4	5482,9	5483,2	5483,5	5483,8	5484	5484,3	5484,6	5484,9	5485,2	5485,2	5488,5	5494,9	5509,5
Torsor	6	5871,1	6528,2	6527,9	6527,6	6527,3	6527	6526,7	6526,4	6526,1	6525,8	6525,5	6500,6	6395,7	6235,1
Longitudinal	1	1788,4	1778,9	1779,1	1779,3	1779,6	1779,8	1780,1	1780,3	1780,6	1780,8	1781,1	1783,5	1788,4	1798,4
Longitudinal	2	3520,2	3556	3554,9	3553,7	3552,5	3551,4	3550,3	3549,2	3548,1	3547	3545,9	3536,3	3524,3	3525,3
Longitudinal	3	5193,4	5336,6	5337,3	5338	5338,8	5339,5	5340,2	5341	5341,7	5342,4	5343,2	5350,5	5365,3	5395,2
Longitudinal	4	6573,5	7112	7109,7	7107,3	7104,9	7102,5	7100,1	7097,7	7095,3	7093	7090,6	7067	7021	6936,3
Longitudinal	5	7778,3	8661,3	8660,9	8660,4	8659,9	8659,5	8659	8658,5	8658	8657,6	8657,1	8652,1	8538,3	8362,9

Fisura B20			0,2mm	0,4mm	0,6mm	0,8 mm	1mm	1,2mm	1,4mm	1,6 mm	1,8mm	2mm	4mm	8mm	16mm
	Modo	Frecuencia 3D	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia
Flector	1	365,43	365,67	365,66	365,64	365,63	365,61	365,69	365,58	365,56	365,55	365,53	365,37	365,06	364,44
Flector	2	367,8	365,69	365,69	365,69	365,68	365,68	365,68	365,68	365,68	365,68	365,68	365,67	365,65	365,61
Flector	3	932,85	932,48	932,45	932,42	932,39	932,36	932,33	932,3	932,27	932,23	932,2	931,9	931,29	930,09
Flector	4	937,92	932,51	932,51	932,51	932,51	932,51	932,51	932,51	932,51	932,5	932,5	932,5	932,48	932,45
Flector	5	1680,7	1677,7	1677,6	1677,6	1677,6	1677,5	1677,5	1677,5	1677,4	1677,4	1677,3	1677	1676,2	1674,7
Flector	6	1688	1677,7	1677,7	1677,7	1677,7	1677,7	1677,7	1677,7	1677,7	1677,7	1677,7	1677,8	1677,8	1677,9
Flector	7	2546,9	2537,6	2537,5	2537,5	2537,5	2537,4	2537,4	2537,4	2537,3	2537,3	2537,2	2536,9	2536,2	2534,9
Flector	8	2554,6	2537,6	2537,6	2537,6	2537,6	2537,6	2537,7	2537,7	2537,7	2537,7	2537,7	2537,8	2538	2538,3
Flector	9	3491,9	3473,6	3473,6	3473,5	3473,5	3473,5	3473,5	3473,5	3473,4	3473,4	3473,4	3473,2	3472,8	3471,9
Flector	10	3499,4	3473,6	3473,7	3473,7	3473,7	3473,7	3473,7	3473,7	3473,8	3473,8	3473,8	3474	3474,4	3475,2
Flector	11	4492,5	4460,7	4460,7	4460,7	4460,7	4460,7	4460,7	4460,7	4460,7	4460,7	4460,7	4460,7	4460,7	4460,8
Flector	12	4497,5	4460,7	4460,7	4460,8	4460,8	4460,8	4460,9	4460,9	4460,9	4461	4461	4461,3	4462	4463,4
Torsor	1	1096,1	1103	1103	1103	1103	1103	1103	1103	1102,9	1102,9	1102,9	1102,8	1102,6	1102,1
Torsor	2	2192	2206,1	2206	2206	2206	2206	2205,9	2205,9	2205,9	2205,9	2205,8	2205,6	2205,1	2204,2
Torsor	3	3287,8	3309,1	3309,1	3309	3309	3309	3308,9	3308,9	3308,9	3308,8	3308,8	3308,4	3307,7	3306,4
Torsor	4	4383,1	4412,1	4412,1	4412	4412	4412	4411,9	4411,9	4411,8	4411,8	4411,7	4411,3	4410,4	4408,7
Torsor	5	5477,8	5482,7	5482,7	5482,7	5482,7	5482,8	5482,8	5482,8	5482,8	5482,9	5482,9	5483,2	5483,7	5484,9
Torsor	6	6571	6528,5	6528,6	6528,6	6528,7	6528,7	6528,8	6528,8	6528,9	6529	6529	6529,6	6530,7	6533
Longitudinal	1	1786,2	1778,6	1778,6	1778,6	1778,5	1778,5	1778,5	1778,5	1778,5	1778,5	1778,5	1778,3	1778	1777,5
Longitudinal	2	3563,7	3557,2	3557,2	3557,2	3557,1	3557,1	3557	3557	3557	3557	3556,9	3556,6	3556,1	3555
Longitudinal	3	5320,7	5335,8	5335,7	5335,7	5335,7	5335,6	5335,6	5335,5	5335,5	5335,4	5335,4	5335	5334,2	5332,6
Longitudinal	4	7047	7114,4	7114,3	7114,3	7114,2	7114,2	7114,4	7114,1	7114	7114	7113,9	7113,4	7112,4	7110,5
Longitudinal	5	8723,6	8661,9	8662	8662,1	8662,2	8662,4	8662,5	8662,6	8662,7	8662,8	8662,9	8664,1	8666,4	8671,2

Fisura B40		0,2mm	0,4mm	0,6mm	0,8 mm	1mm	1,2mm	1,4mm	1,6 mm	1,8mm	2mm	4mm	8mm	16mm
	modo	Frecuencia 3D	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia
Flector	1	358,03	365,65	365,56	365,52	365,48	365,43	365,39	365,35	365,31	365,26	364,84	364,01	362,39
Flector	2	366,72	365,68	365,67	365,66	365,65	365,65	365,64	365,63	365,62	365,62	365,54	365,4	365,12
Flector	3	918,15	932,42	932,34	932,16	932,07	931,99	931,9	931,81	931,73	931,64	930,78	929,08	925,8
Flector	4	935,51	932,5	932,48	932,45	932,43	932,42	932,4	932,39	932,37	932,35	932,2	931,89	931,26
Flector	5	1659	1677,6	1677,5	1677,2	1677,1	1677	1676,9	1676,7	1676,6	1676,5	1675,3	1672,9	1668
Flector	6	1683,9	1677,7	1677,7	1677,6	1677,6	1677,6	1677,6	1677,5	1677,5	1677,5	1677,2	1676,8	1675,8
Flector	7	2525,8	2537,5	2537,2	2537,1	2536,9	2536,8	2536,7	2536,5	2536,4	2536,2	2534,9	2532,3	2527,5
Flector	8	2548,3	2537,6	2537,5	2537,5	2537,4	2537,4	2537,4	2537,4	2537,3	2537,3	2537	2536,4	2535,2
Flector	9	3465,4	3473,5	3473,3	3473,1	3472,9	3472,8	3472,7	3472,5	3472,4	3472,3	3470,9	3468,2	3462,7
Flector	10	3490,6	3473,6	3473,5	3473,5	3473,4	3473,4	3473,4	3473,3	3473,3	3473,3	3472,9	3472,2	3470,9
Flector	11	4474,4	4460,6	4460,4	4460,2	4460,1	4460	4459,9	4459,8	4459,6	4459,5	4458,4	4456,2	4452,2
Flector	12	4486,6	4460,6	4460,6	4460,5	4460,5	4460,5	4460,4	4460,4	4460,3	4460,3	4459,9	4459,2	4457,9
Torsor	1	1091,6	1103	1102,9	1102,8	1102,7	1102,7	1102,6	1102,6	1102,5	1102,4	1101,8	1100,6	1098,2
Torsor	2	2182,9	2206	2205,8	2205,6	2205,5	2205,4	2205,2	2205,1	2205	2204,9	2203,7	2201,2	2196,5
Torsor	3	3273,6	3309	3308,8	3308,4	3308,2	3308,1	3307,9	3307,7	3307,5	3307,3	3305,5	3301,9	3294,9
Torsor	4	4362,7	4411,9	4411,7	4411,2	4411	4410,8	4410,5	4410,3	4410	4409,8	4407,4	4402,8	4393,7
Torsor	5	5447,7	5482,5	5482,4	5482,3	5482,2	5482,1	5482	5481,9	5481,8	5481,7	5480,8	5479,2	5476,5
Torsor	6	6526,3	6528,4	6528,3	6528,2	6528,1	6528	6528	6527,9	6527,8	6527,8	6527,1	6525,8	6523,6
Longitudinal	1	1779,9	1778,5	1778,5	1778,4	1778,3	1778,2	1778,1	1778,1	1778	1777,9	1777,3	1776,1	1774
Longitudinal	2	3554,2	3557,1	3556,9	3556,8	3556,7	3556,4	3556,3	3556,2	3556	3555,9	3554,7	3552,4	3548,6
Longitudinal	3	5296	5335,6	5335,4	5335,2	5335	5334,6	5334,4	5334,2	5334	5333,8	5331,9	5328,1	5321
Longitudinal	4	7016,9	7114,2	7113,9	7113,6	7113,4	7112,9	7112,6	7112,3	7112,1	7111,8	7109,3	7104,4	7095,7
Longitudinal	5	8683	8661,8	8661,7	8661,7	8661,7	8661,6	8661,6	8661,6	8661,6	8661,5	8661,3	8660,9	8660,6

Fisura B60		0,2mm	0,4mm	0,6mm	0,8 mm	1mm	1,2mm	1,4mm	1,6 mm	1,8mm	2mm	4mm	8mm	16mm
	Modo Frecuencia 3D	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia
Flector	1	346,68	365,62	365,48	365,41	365,35	365,28	365,21	365,14	365,07	365,01	364,33	363,02	360,5
Flector	2	364,01	365,67	365,63	365,61	365,59	365,57	365,55	365,53	365,51	365,49	365,29	364,89	364,09
Flector	3	897,87	932,37	932,08	931,94	931,79	931,65	931,51	931,37	931,22	931,08	929,68	926,94	921,75
Flector	4	929,67	932,47	932,37	932,33	932,28	932,24	932,19	932,15	932,1	932,05	931,6	930,7	928,92
Flector	5	1627,7	1677,5	1677,1	1676,9	1676,7	1676,5	1676,3	1676,1	1675,8	1675,6	1673,5	1669,3	1660,7
Flector	6	1674,3	1677,7	1677,5	1677,4	1677,4	1677,3	1677,2	1677,1	1677,1	1677	1676,3	1674,8	1672
Flector	7	2501,9	2537,4	2537,1	2536,9	2536,4	2536,1	2535,9	2535,7	2535,4	2535,2	2532,8	2528,3	2520
Flector	8	2534,3	2537,5	2537,4	2537,2	2537,1	2537	2536,9	2536,8	2536,7	2536,6	2535,6	2533,6	2529,7
Flector	9	3427,2	3473,4	3473,1	3472,8	3472,3	3472	3471,8	3471,5	3471,2	3470,9	3468,2	3462,5	3450,6
Flector	10	3472,7	3473,5	3473,4	3473,2	3473	3472,8	3472,7	3472,6	3472,5	3472,3	3471,1	3468,6	3463,8
Flector	11	4453,4	4460,4	4459,9	4459,6	4459,4	4459,1	4458,9	4458,6	4458,4	4458,1	4455,6	4450,8	4442,1
Flector	12	4468,9	4460,5	4460,2	4460,1	4459,9	4459,8	4459,6	4459,5	4459,3	4459,1	4457,6	4454,7	4449
Torsor	1	1083,1	1102,9	1102,5	1102,4	1102,2	1102,1	1101,9	1101,27	1101,6	1101,4	1099,7	1096,5	1090
Torsor	2	2165,3	2205,8	2205,1	2204,8	2204,4	2204,1	2203,8	2203,4	2203,1	2202,8	2199,5	2193	2180,2
Torsor	3	3244,7	3308,6	3307,7	3307,2	3306,7	3306,2	3305,7	3305,2	3304,7	3304,2	3299,3	3289,7	3271,1
Torsor	4	4317	4411,5	4410,2	4409,6	4408,9	4408,3	4407,6	4407	4406,3	4405,7	4399,2	4386,6	4362,7
Torsor	5	5378,1	5482,4	5481,9	5481,6	5481,4	5481,1	5480,9	5480,6	5480,4	5480,2	5477,9	5473,6	5455,4
Torsor	6	6434,4	6528,2	6527,7	6527,5	6527,2	6527	6526,7	6526,5	6526,3	6526	6523,6	6519,1	6510,7
Longitudinal	1	1770,9	1778,4	1778,1	1777,9	1777,7	1777,6	1777,4	1777,2	1777,1	1776,9	1775,3	1772,5	1768
Longitudinal	2	3541,6	3556,9	3556,2	3555,8	3555,5	3555,2	3554,8	3554,5	3554,2	3553,8	3550,8	3545,5	3537,6
Longitudinal	3	5250,9	5335,3	5334,8	5333,7	5333,2	5332,7	5332,2	5331,7	5331,1	5330,6	5325,6	5316	5299
Longitudinal	4	6958,9	7113,7	7112,4	7111,7	7111	7110,3	7109,6	7108,9	7108,3	7107,6	7101,1	7088,9	7067,9
Longitudinal	5	8558,8	8661,5	8661,1	8660,8	8660,6	8660,3	8660,1	8659,9	8659,6	8659,4	8657,1	8652,6	8644,9

Fisura B80		0,2mm	0,4mm	0,6mm	0,8 mm	1mm	1,2mm	1,4mm	1,6 mm	1,8mm	2mm	4mm	8mm	16mm
	Modo Frecuencia 3D	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia
Flector	1	332,57	365,61	365,44	365,36	365,27	365,19	365,11	365,03	364,95	364,86	364,05	362,48	359,5
Flector	2	358,99	365,64	365,56	365,51	365,47	365,43	365,38	365,34	365,29	365,25	364,82	363,96	362,28
Flector	3	875,1	932,33	931,97	931,8	931,62	931,44	931,26	931,09	930,91	930,74	929	925,63	919,29
Flector	4	919,15	932,41	932,21	932,11	932,02	931,92	931,82	931,72	931,62	931,52	930,54	928,62	924,89
Flector	5	1589,4	1677,5	1676,9	1676,6	1676,4	1676,1	1675,8	1675,5	1675,3	1675	1672,2	1666,3	1654,1
Flector	6	1657,3	1677,4	1677,2	1677,1	1676,9	1676,8	1676,6	1676,4	1676,3	1676,1	1674,6	1671,5	1665,5
Flector	7	2478,7	2536,9	2536,6	2536,3	2535,9	2535,6	2535,3	2534,9	2534,6	2534,3	2531,1	2525	2513,9
Flector	8	2510,5	2537,2	2536,9	2536,7	2536,5	2536,3	2536,1	2535,8	2535,5	2535,4	2533,3	2529	2521
Flector	9	3378,4	3472,8	3472,4	3472	3471,6	3471,2	3470,8	3470,4	3470	3469,6	3465,3	3456	3436,1
Flector	10	3446	3473,1	3472,8	3472,5	3472,2	3471,9	3471,7	3471,4	3471,1	3470,8	3468,1	3462,8	3452,7
Flector	11	4428,2	4459,8	4459,4	4459	4458,6	4458,1	4457,7	4457,3	4456,9	4456,5	4452,4	4444,7	4430,8
Flector	12	4448,6	4460,3	4459,7	4459,3	4459	4458,7	4458,3	4458	4457,7	4457,3	4454	4447,6	4435,5
Torsor	1	1069,2	1102,6	1101,8	1101,4	1101	1100,6	1100,2	1099,8	1099,4	1099	1095,1	1087,3	1072,1
Torsor	2	2135,2	2205,3	2203,7	2202,9	2202,1	2201,3	2200,5	2199,7	2198,9	2198,1	2190,2	2174,8	2145,4
Torsor	3	3192,4	3307,9	3305,6	3304,4	3303,2	3302	3300,8	3299,6	3298,4	3297,2	3285,6	3262,9	3221,3
Torsor	4	4233,4	4410,6	4407,4	4405,8	4404,3	4402,7	4401,1	4399,6	4398	4396,4	4381,1	4351,8	4300,3
Torsor	5	5264,8	5482,2	5481,3	5480,8	5480,4	5480	5479,5	5479,1	5478,7	5478,2	5474,1	5441,6	5382,9
Torsor	6	6301,9	6528	6527,5	6526,5	6526	6525,5	6525,1	6524,6	6524,1	6523,6	6518,9	6509,9	6469,1
Longitudinal	1	1759,6	1778,3	1777,6	1777,2	1776,9	1776,5	1776,2	1775,9	1775,6	1775,2	1772,2	1766,8	1758,8
Longitudinal	2	3524,3	3556,5	3555,1	3554,5	3553,8	3553,1	3552,5	3551,8	3551,2	3550,6	3544,7	3534,9	3521,6
Longitudinal	3	5184,4	5334,8	5332,7	5331,6	5330,6	5329,6	5328,6	5327,5	5326,5	5325,5	5315,6	5297,1	5265,7
Longitudinal	4	6862,1	7113	7110,3	7108,9	7107,5	7106,2	7104,8	7103,5	7102,2	7100,9	7088	7064,5	7025,4
Longitudinal	5	8407,4	8660,7	8660,1	8659,5	8659	8658,4	8657,9	8657,3	8656,8	8656,2	8650,8	8640,5	8622,4

Fisura B100		0,2mm	0,4mm	0,6mm	0,8 mm	1mm	1,2mm	1,4mm	1,6 mm	1,8mm	2mm	4mm	8mm	16mm
Modo Frecuencia 3D		Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia
Flector	1	317,47	365,51	365,43	365,34	365,25	365,17	365,08	364,99	364,91	364,82	363,97	362,29	359,1
Flector	2	350,91	365,51	365,43	365,34	365,25	365,17	365,08	364,99	364,91	364,82	363,98	362,34	359,26
Flector	3	852,5	932,32	931,92	931,73	931,53	931,34	931,15	930,95	930,76	930,57	928,66	924,97	918,03
Flector	4	902,44	932,32	931,92	931,73	931,53	931,34	931,15	930,95	930,76	930,57	928,66	924,98	918,05
Flector	5	1545,5	1677,4	1676,8	1676,5	1676,1	1675,8	1675,5	1675,1	1674,8	1674,5	1671	1663,6	1647,3
Flector	6	1630,4	1677,4	1676,8	1676,5	1676,2	1675,9	1675,5	1675,2	1674,9	1674,6	1671,6	1665,8	1655
Flector	7	2456,6	2537,2	2536,3	2535,9	2535,5	2535,1	2534,6	2534,2	2533,8	2533,4	2529,3	2521,5	2507
Flector	8	2474,8	2536,7	2536,3	2535,9	2535,5	2535,1	2534,7	2534,2	2533,8	2533,4	2529,4	2521,7	2507,7
Flector	9	3319,3	3472,5	3472	3471,4	3470,9	3470,3	3469,7	3469,2	3468,6	3468	3461,7	3447,7	3417,1
Flector	10	3413	3472,5	3472	3471,5	3471	3470,4	3469,9	3469,4	3468,9	3468,4	3463,2	3453,5	3435,5
Flector	11	4393,1	4459,4	4458,8	4458,1	4457,5	4456,9	4456,2	4455,6	4455	4454,4	4448,2	4436,5	4415
Flector	12	4425,9	4459,4	4458,8	4458,1	4457,5	4456,9	4456,2	4455,6	4455	4454,4	4448,3	4436,6	4415,3
Torsor	1	1046,5	1101	1100	1099	1098	1097	1096	1095	1094	1093	1083,2	1064,3	1029,3
Torsor	2	2084,7	2202,1	2200,1	2198	2196,1	2194,1	2192,1	2190,1	2188,1	2186,1	2166,8	2130,4	2067,4
Torsor	3	3104,9	3303,1	3300,1	3297,1	3294,1	3291,2	3288,2	3285,3	3282,4	3279,5	3251,1	3199,6	3119,1
Torsor	4	4111,4	4404,2	4400,2	4396,3	4392,3	4388,4	4384,5	4380,7	4376,8	4373	4336,4	4273	4184,3
Torsor	5	5126,3	5481,1	5480,4	5479,7	5478,9	5478,2	5477,5	5476,3	5471,6	5466,9	5423	5350,8	5260,9
Torsor	6	6160,5	6526,8	6525,9	6525,1	6524,2	6523,4	6522,6	6521,7	6520,9	6520,1	6510,9	6433	6346,4
Longitudinal	1	1745,2	1777,4	1776,8	1776,3	1775,7	1775,1	1774,6	1774	1773,5	1772,9	1767,8	1759	1746,3
Longitudinal	2	3496,7	3554,9	3553,7	3552,6	3551,4	3550,3	3549,2	3548,1	3547,1	3546	3536,2	3520,4	3499,8
Longitudinal	3	5092,7	5332,3	5330,5	5328,8	5327	5325,3	5323,5	5321,8	5320,1	5318,4	5301,8	5271,4	5221,6
Longitudinal	4	6718,9	7109,7	7107,4	7105,1	7102,8	7100,5	7098,2	7096	7093,7	7091,5	7070	7031,2	6968,6
Longitudinal	5	8229,9	8659,7	8658,6	8657,6	8656,5	8655,5	8654,4	8653,4	8652,3	8651,3	8641,2	8609	8535,4

ANEXO B. PLANO DE EJE FERROVIARIO

